Brahmagupta, Brahmasphutasiddhanta, selected chunks

English Translation

Modern LaTeX Editions of Public-Domain Mathematics Manuscripts

---

columnsep color

श्रीब्रह्मगुप्ताचार्य-विरचित

Brāhma-sphuṭa-siddhānta

Bilingual Sanskrit–English Edition

PART I, CHUNK 1: PAGES 1–140

CHAPTERS I–VIII

Sanskrit Text in Devanāgar
with English Translation and IAST Transliteration

Based on the critical edition:
Indian Institute of Astronomical and Sanskrit Research, Delhi, 1966
Edited by Acharyavara Ram Swarup Sharma et al.

Typeset in XeLaTeX with Noto Serif Devanagari
Bilingual parallel-column format

Contents

Introduction to This Bilingual Edition **3**

Colophon **21**

Introduction to This Bilingual Edition

This bilingual edition presents the first part of Brahmagupta's *Brāhmasphuṭasiddhānta* (628 CE) in a parallel-column format. The left column contains the original Sanskrit text in Devanāgar script, while the right column provides the English translation with IAST for technical terms.

About the Work

The *Brāhmasphuṭasiddhānta* ("Correctly Established Doctrine of Brahma") is one of the most important works in the history of Indian mathematics and astronomy. Composed by Brahmagupta in 628 CE at Bhillamāla (modern Bhinmal, Rajasthan), it consists of 24 chapters covering astronomical computations, mathematics, and astronomical instruments.

Key Contributions in Chapter VIII

Chapter VIII (the Gaṇitādhyāya) contains Brahmagupta's most celebrated mathematical discoveries:

1. **Rules for zero:** systematic arithmetic with zero as a number
2. **Sign rules:** $(-)(-) = (+)$, $(+)(-) = (-)$
3. **Quadratic formula:** Complete solution of $ax^2 + bx = c$
4. **Brahmagupta's formula:** For the area of a cyclic quadrilateral
5. **Pell's equation:** The composition method (bhāvanā)

Chapter I

Mean Longitudes of Planets | मध्यमाधिकारः

1 नमोऽस्तु ब्रह्मणे तस्मै यत्प्रसादवशात्पुनः
ज्ञातं ग्रहगणितं मे तत्समीकरणं क्रियते

2 ब्रह्मोक्तं ग्रहगणितं महता कालेन यत् स्खलीतं मतम्
श्रीभ्रशीयते स्फुटं तज्ज्ञप्तं तद्ब्रह्मगुप्तेन

3 युगब्धिर्युगवर्षाणि युगमासा युगाहराः
दिनैः सौरैर्भवत्यब्दस्तिथिभिश्चान्द्रमाः स्मृतः

4 नक्षत्रैः सवनाभ्दस्तु सैराप्यथ चतुर्गुणः
पञ्चदश्यां चतुर्दश्यां पूर्णे चान्द्रमसी स्मृते

5 चतुर्युगसहस्रं तु ब्रह्मणो दिवसं स्मृतम्
तदर्धं रात्रिरित्युक्तं तस्यैते कल्पसंज्ञिताः

6 कल्पस्यादौ भवेद्ब्रह्मा मध्ये विष्णुस्तथान्तके
रुद्रस्त्रैलोक्यनाथास्ते त्रयस्ते संप्रकीर्तिताः

7 तस्मिन्कल्पे तु ब्रह्माणि षड्जीवाः संप्रकीर्तिताः
मनवः संस्थितास्तत्र मनुष्याः पूर्वसंज्ञिताः

8 युगानां चत्वारि स्मृतानि सहस्राणि युगे तु ते
चतुर्युगं तत्सहस्रं ब्रह्मणो दिवसं स्मृतम्

9 कृतं त्रेताद्वापरं च कलिश्चैव युगानि तु
चतुर्युगं तत्सहस्रं ब्रह्मणो दिवसं स्मृतम्

10 कृतं धर्मचतुष्पात्त्रेतायां तु त्रिपादपि
द्वापरे द्वपदं प्रोक्तं कलौ पादस्तु धर्मतः

11 संवत्सरशतं मानुषं दिव्यं वर्षं प्रकीर्तितम्
दिव्यानां संख्यया वर्षं ब्रह्मणो दिवसं स्मृतम्

12 ब्रह्मविष्णिवन्द्ररुद्राणां मनूनां च यथाक्रमम्
चतुर्युगसहस्रं तु ब्रह्मणो दिवसं स्मृतम्

13 मनुष्यदेवगन्धर्वा राक्षसानि सरीसृपाः
पितरश्चैव सर्वे ते कल्पादौ संप्रकीर्तिताः

14 ग्रहनक्षत्रमासर्त्वृतुसंवत्सरकादयः
पञ्चविंशतितत्त्वानि तानि ज्ञेयानि यत्नतः

15 चतुर्भिस्तु मानवर्गेण ग्रहाणां गणितं भवेत्
तेषां संख्यां प्रवक्ष्यामि यथावदनुपूर्वशः

Verse 1: Salutation to that Brahman, by whose grace I have again come to know the computation of planets; now I proceed to reconcile it.

Verse 2: The planetary computation taught by Brahman had become inaccurate through the lapse of long time; that has been correctly established by Brahmagupta.

Verse 3: The years of a *yuga* are its *abda*; the days of a *yuga* are its *ahargaạ*. A year consists of solar days; a month of lunar *tithi*s.

Verse 4: A *sāvana* year consists of *nakṣatra* days; a solar year is fourfold. The full moon at the fifteenth *tithi* is complete, at the fourteenth incomplete.

Verse 5: A thousand *caturyuga*s are a day of Brahman; half is night. These are called a *kalpa*.

Verse 6: At the beginning of a *kalpa* arises Brahmā, in the middle Viṇu, at the end Rudra: these three lords of the three worlds.

Verse 7: In that *kalpa*, six *j*
=*ivas* — the *manus* — are established; there dwell the people called *p*
=*urva*.

Verse 8: Four world-ages in a *yuga*; a thousand *caturyuga*s are a day of Brahman.

Verse 9: The *kṛta*, *trētā*, *dvāpara*, and *kali* are the ages; a thousand *caturyuga*s are a day of Brahman.

Verse 10: In *kṛta*, dharma has four feet; in *trētā* three; in *dvāpara* two; in *kali* one.

Verse 11: A hundred human years is a *divya* year; by such divine years, a day of Brahman is known.

Verse 12: The thousand *caturyuga*s of Brahmā, Viṇu, Indra, Rudra, and the *manu*s are a day of Brahman.

Verse 13: Humans, gods, *gandharva*s, *rākṣasa*s, serpents, and ancestors — all proclaimed at the start of the *kalpa*.

Verse 14: Planets, asterisms, months, seasons, years — these twenty-five *tattva*s to be known diligently.

Verse 15: By four measures the planets are computed; I declare their numbers in order.

Verse 16: By solar measure, the Sun's mo-

16 सैरमानेन भानूनां चान्द्रेण शशिनो गतिः
नाक्षत्रेण ग्रहाणां तु सावनेन दिनस्य च

17 एभिस्तु नवभिर्मानैर्व्यवहारः प्रवर्तते
लोकस्यास्य तु सर्वस्य ग्रहाणां गणितं प्रति

18 चतुर्भिस्तु मनुष्याणां व्यवहारः प्रवर्तते
सौरचान्द्रनाक्षत्रसावनैर्मानैः क्रमात्

19 ग्रहगणितं तु यत्किञ्चित्तत्सर्वं मानसाधितम्
मानैर्विना न तज्ज्ञानं ग्रहाणां संप्रवर्तते

20 मानानि सैरचान्द्राणि सावनानि ग्रहानयनम्
एभिर्मानैश्चतुर्भिस्तु संयवहारोज्जलोकस्य

21 तिथयः पञ्चदश्यां तु शुक्ले कृष्णे तथैव च
एकं मासं तु ताभिस्तु संवत्सरः स तैस्तु वै

22 मासैर्द्वादशभिर्वर्षं त्रयोदशभिरेव च
चतुर्भिर्हीनसंवत्सरं पञ्चभिर्धनसंवत्सरम्

23 गतपूर्वां गतिमुक्त्वा तु ग्रहाणां योजयेद्बुधः
ताभिर्मध्यमसंज्ञाभिर्ग्रहाणां गणितं भवेत्

24 मध्यमात्स्फुटं ज्ञात्वा ततः पुनः संस्कारैर्विधातव्यम्
यथा स्यात्स्फुटतत्त्वतो ग्रहाणां गणितं बुधैः

25 तिथ्यन्तरं नक्षत्रं तु ग्रहाणां तु गतिर्यथा
तत्सर्वं मानवर्गेण कल्पितं तु यथाक्रमम्

26 इति मानानि सर्वाणि यथावदनुपूर्वशः
प्रोक्तानि तानि सर्वाणि ग्रहगणितचिन्तकैः

27 युगब्धिर्युगवर्षाणि युगमासा युगाहराः
दिनैः सौरैर्भवत्यब्दस्तिथिभिश्चान्द्रमाः स्मृतः

28 चतुर्दशभुवनैः सार्धैः सौरो वर्षो विधीयते
तमतिक्रम्य ग्रहाणां मध्यमा गतिरिष्यते

29 तिथयः पञ्चदश्यां तु शुक्ले कृष्णे तथैव च
एकं मासं तु ताभिस्तु संवत्सरः स तैस्तु वै

30 मासैर्द्वादशभिर्वर्षं त्रयोदशभिरेव च
चतुर्भिर्हीनसंवत्सरं पञ्चभिर्धनसंवत्सरम्

31 गतपूर्वां गतिमुक्त्वा तु ग्रहाणां योजयेद्बुधः
ताभिर्मध्यमसंज्ञाभिर्ग्रहाणां गणितं भवेत्

tion; by lunar, the Moon's; by sidereal, the planets'; by civil, the day's.

Verse 17: By these nine measures the world's transactions proceed, for planetary computation.

Verse 18: For humans, transactions by four measures: solar, lunar, sidereal, and civil, in order.

Verse 19: All planetary computation is accomplished by measures; without them, that knowledge does not proceed.

Verse 20: The solar, lunar, sidereal, and civil measures are for planetary computation; by these four, the world's transactions proceed.

Verse 21: Fifteen *tithi*s in bright and dark fortnight make one month; a year of those.

Verse 22: Twelve months a year; with thirteen, deficient; with five extra, abundant.

Verse 23: Having stated past and future motions, the wise compute; by these mean quantities, planetary computation proceeds.

Verse 24: Knowing true from mean longitudes, then corrections must be applied for exactness.

Verse 25: The *tithi*, *antara*, *nakṣatra*, and planetary motions — all devised by measures in order.

Verse 26: Thus all measures declared in order by those who contemplate planetary computation.

Verse 27: The years of a *yuga*, its months and days. A year of solar days; a month of lunar *tithi*s.

Verse 28: The solar year: fourteen and a half terrestrial years; mean motion reckoned beyond.

Verse 29: Fifteen *tithi*s in each fortnight; a month of those, a year of months.

Verse 30: Twelve months a year; thirteen, deficient; five extra, abundant.

Verse 31: Past and future motions stated, the wise compute by mean quantities.

Verse 32: From mean to true, corrections applied, for exact planetary computation by the wise.

32 मध्यमात्स्फुटं ज्ञात्वा ततः पुनः संस्कारैर्विधातव्यम्
यथा स्यात्स्फुटतत्त्वतो ग्रहाणां गणितं बुधैः

Chapter II

True Longitudes of Planets | स्फुटाधिकारः

1 मध्यमागत्या ग्रहाणां स्फुटं ज्ञातुं तु यः स्पृहन्
संस्कारान्सोऽधिगच्छेत तत्स्फुटं स्यात्तु तत्त्वतः

2 मन्दोच्चशीघ्रोच्चयोः क्षेत्रे चक्रार्धं तु पञ्चमम्
तत्र मन्दगतिः प्रोक्ता शीघ्रगतिस्ततः परम्

3 मन्दफलं तु तत्क्षेत्रे शीघ्रफलं तथैव च
तयोर्योगेन हानं वा स्फुटं ज्ञेयं तु तत्त्वतः

4 मन्दोच्चाद्धृतं क्षेत्रं तु मन्दफलस्य कारणम्
शीघ्रोच्चाद्धृतमप्येवं शीघ्रफलस्य कारणम्

5 मध्यमं मन्दफलेनैव युक्तं वा हीनमेव वा
तत्फलं शीघ्रसंस्कारैर्युक्तं वा हीनमेव वा

6 ततः स्फुटं भवेद्ग्रहं मन्दशीघ्रक्रमेण तु
एवं ग्रहगणितं प्रोक्तं यथावदनुपूर्वशः

7 सूर्यस्य तु गतिः प्रोक्ता मन्देनैव विना क्वचित्
शीघ्रेण सहिता तस्मात्तत्स्फुटं ज्ञेयमेव तु

8 चन्द्रस्य मन्दसंस्कारः शीघ्रसंस्कार एव च
तयोर्योगेन हानं वा स्फुटं तस्य प्रजायते

9 उच्चे मन्दगतिर्यावत् तावत् तत्र फलं स्मृतम्
नीचे तु द्विगुणं प्रोक्तं त्रिगुणं चान्तरालके

10 चतुर्भिर्मानवर्गेण संस्काराः षोडश स्मृताः
तैः संस्कृतं ग्रहं ज्ञात्वा स्फुटं तत्र प्रकल्पयेत्

11 तिथ्यब्दयुगवर्षेषु मासेषु दिवसेषु च
गतिस्तेषां ग्रहाणां तु मध्यमाद्यैः प्रकल्पिता

12 मध्यमात्स्फुटमानं तु ग्रहाणां योजयेद्बुधः
ततो ग्रहगणितं प्रोक्तं सर्वं स्फुटतरं भवेत्

13 एवं स्फुटगतिः प्रोक्ता ग्रहाणां यथाक्रमम्
ताभिर्ग्रहगणितं सर्वं यथावदनुपूर्वशः

14 रवेर्मन्दफलं हीनं शीघ्रफलं तु पूजितम्
चन्द्रस्य तु गतिः प्रोक्ता मन्दशीघ्रक्रमेण तु

15 ताराग्रहाणां सर्वेषां मन्दशीघ्रफले सदा
तयोर्योगेन हानं वा स्फुटं तत्र प्रजायते

Verse 1: He who desires the true from the mean longitudes of planets should understand the corrections; then the true is obtained.

Verse 2: The field of *manda* and
=*s*
=*ighra* apogees is the fifth of a circle (72°); there the *manda* motion, and
=*s*
=*ighra* beyond.

Verse 3: The *manda-phala* in that field, and
=*s*
=*ighra-phala* likewise; by their sum or difference, the true is known.

Verse 4: The arc from the *manda* apogee causes the *manda-phala*; from the
=*s*
=*ighra* apogee, the
=*s*
=*ighra-phala*.

Verse 5: The mean increased or decreased by *manda-phala*; that result increased or decreased by
=*s*
=*ighra* corrections.

Verse 6: Thence the true planet, by *manda* and
=*s*
=*ighra* process in order; thus planetary computation declared.

Verse 7: The Sun's motion sometimes without *manda*; together with
=*s*
=*ighra*, the true is known.

Verse 8: For the Moon, *manda* and
=*s*
=*ighra* corrections; by sum or difference, the true arises.

Verse 9: At apogee, onefold *manda* result; at perigee, double; in between, triple.

Verse 10: By four measures, sixteen corrections; knowing the corrected planet, compute the true.

Verse 11: In *tithi*s, years, *yuga*s, months, and days, planetary motion computed from means.

Verse 12: From mean to true measure of planets, the wise compute; all becomes more

16 पूर्वापरं गतिं ज्ञात्वा मन्दशीघ्रक्रमेण तु
ततः स्फुटं भवेद्ग्रहं सर्वदैव गणितज्ञैः

17 एवं स्फुटगतिः प्रोक्ता ग्रहाणां सूर्यजन्यपि
ताराग्रहाणां सर्वेषां यथावदनुपूर्वशः

18 ग्रहाणां मध्यमाज्ज्ञात्वा स्फुटं यः कर्तुमिच्छति
संस्कारान्सोऽधिगच्छेत ततः स्फुटतरं भवेत्

exact.

Verse 13: Thus true motion declared for planets in order; by them all computation proceeds.

Verse 14: For Sun, *manda-phala* subtracted,
=*s*
=*ighra-phala* added; for Moon, by both processes.

Verse 15: For all star-planets, *manda* and
=*s*
=*ighra* equations always; by sum or difference, the true arises.

Verse 16: Knowing eastward and westward motion by both processes, the true planet is always obtained by calculators.

Verse 17: Thus true motion declared for Sun-born planets and all star-planets in order.

Verse 18: He who desires true from mean of planets should understand corrections; it becomes more exact.

Chapter III

Three Problems: Time, Place, and Direction | त्रिप्रश्नाधिकारः

1 त्रयः प्रश्नाः प्रवक्ष्यामि ग्रहाणां गणिते सदा
कालस्थानदिशां ज्ञानं तेषां ज्ञात्वा फलं लभेत्

2 कालः स्थानं दिशं चैव त्रय एव ग्रहस्य तु
तेषां ज्ञानेन संयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्

3 कालज्ञानाद्गतिं ज्ञात्वा स्थानज्ञानात्तु याम्यताम्
दिग्ज्ञानादायतिं प्रोक्तां त्रय एव फलप्रदाः

4 कालः खचरसंज्ञः स्यात्स्थानं भूचरमेव तु
दिशं तु दिग्गजं प्रोक्तं त्रयस्ते ग्रहसाधनाः

5 तिथ्यब्दयुगवर्षेषु मासेषु दिवसेषु च
कालः संख्यामयः प्रोक्तः स्थानं देशान्तरं स्मृतम्

6 दिग्वलयं दिशं प्रोक्तां त्रयस्ते ग्रहसाधनाः
तेषां ज्ञानेन संयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्

7 देशान्तरं योजयित्वा कालेनैव तु संयुतम्
ततो ग्रहगणितं प्रोक्तं स्फुटं तत्र प्रजायते

8 आकाशस्य गतिः प्रोक्ता कालेनैव तु संयुता
स्थानेनैव तु संयुक्ता दिशा संयुज्यते तथा

9 एवं त्रिप्रश्नसंयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्
तस्मात्त्रिप्रश्नज्ञानं सर्वदैव गणितज्ञैः

10 देशान्तरं दिशं कालं त्रयः प्रश्नाः प्रकीर्तिताः
तेषां ज्ञानेन संयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्

11 पञ्चदश्यां चतुर्दश्यां पूर्णे चान्द्रमसी स्मृते
तिथ्यन्तरं तु तज्ज्ञेयं कालज्ञानं तु तैः सह

12 देशान्तरं योजयित्वा कालेनैव तु संयुतम्
ततो ग्रहगणितं प्रोक्तं स्फुटं तत्र प्रजायते

13 दिग्वलयं दिशं प्रोक्तां त्रयस्ते ग्रहसाधनाः
तेषां ज्ञानेन संयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्

14 एवं त्रिप्रश्नसंयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्
तस्मात्त्रिप्रश्नज्ञानं सर्वदैव गणितज्ञैः

15 तिथ्यब्दयुगवर्षेषु मासेषु दिवसेषु च
कालः संख्यामयः प्रोक्तः स्थानं देशान्तरं स्मृतम्

Verse 1: I declare the three questions always in planetary computation: knowing time, place, and direction, one obtains the result.

Verse 2: Time, place, and direction — these three for a planet; joined with their knowledge, it becomes more exact.

Verse 3: From time, motion; from place, declination; from direction, amplitude — these three give results.

Verse 4: Time is called sky-wandering (*kha-cara*); place is earth-wandering (*bh =u-cara*); direction is direction-elephant (*dig-gaja*) — these three accomplish the planet.

Verse 5: In *tithi*s, years, *yuga*s, months, days, time is numerical; place is the difference of countries (*de =sāntara*).

Verse 6: The *dig-valaya* is direction — these three accomplish the planet; joined with knowledge, it becomes more exact.

Verse 7: Applying the difference of countries joined with time, then planetary computation: the true arises.

Verse 8: The sky's motion joined with time, with place, and with direction.

Verse 9: Thus joined with three questions, the planet becomes more exact; therefore their knowledge always by calculators.

Verse 10: Difference of countries, direction, and time — these three questions proclaimed; joined with knowledge, the planet becomes exact.

Verse 11: At fifteenth and fourteenth *tithi*, full moon remembered; the *tithi-antara* known with time.

Verse 12: Difference of countries joined with time; then planetary computation: the true produced.

Verse 13: The *dig-valaya* as direction — these three accomplish; joined with knowledge, exact.

Verse 14: Thus with three questions, the planet becomes exact; therefore their knowledge by calculators.

Verse 15: In *tithi*s, years, *yuga*s, months, days: time is numerical; place is difference of coun-

16 दिग्वलयं दिशं प्रोक्तां त्रयस्ते ग्रहसाधनाः
तेषां ज्ञानेन संयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्

tries.

Verse 16: The *dig-valaya* as direction — these three accomplish; joined with knowledge, exact.

Chapter IV

Lunar Eclipses | चन्द्रग्रहणाधिकारः

1 चन्द्रग्रहणसंयुक्तं प्रवक्ष्यामि यथातथम्
तस्मात्सर्वं प्रवक्ष्यामि ग्रहणस्यैव लक्षणम्

2 सूर्यचन्द्रमसोर्मध्ये पातो यत्र तु संस्थितः
तत्र ग्रहणसंयोगः स्याच्छुक्ले च कृष्णे तथा

3 चन्द्रः पूर्णमसौ राहुर्ग्रसते यदि संस्थितः
तदा ग्रहणसंयोगः स्यात्ततः पूर्णमण्डलम्

4 चन्द्रस्य ग्रहणं ज्ञात्वा ततः कालं प्रकल्पयेत्
मन्दशीघ्रक्रमेणैव तत्स्फुटं तत्र कारयेत्

5 राहुश्चन्द्रं ग्रसेत्पूर्णं यदा तु पूर्णिमासिते
तदा पूर्णग्रहं ज्ञेयं रवौ तु सूर्यगं स्मृतम्

6 चन्द्रस्य ग्रहणं प्रोक्तं मन्दशीघ्रक्रमेण तु
तत्स्फुटं योजयित्वा तु ततो ग्रहणलक्षणम्

7 एवं चन्द्रग्रहं प्रोक्तं यथावदनुपूर्वशः
तस्मात्सर्वं प्रवक्ष्यामि सूर्यग्रहस्य लक्षणम्

Verse 1: I declare the lunar eclipse as it is; therefore all the characteristics of eclipse.

Verse 2: The node between Sun and Moon — there the eclipse conjunction, in bright and dark fortnight.

Verse 3: If Rāhu at full moon seizes the Moon, then eclipse conjunction; hence the full disk.

Verse 4: Knowing the Moon's eclipse, then compute the time; by *manda* and
=*s*
=*ighra* process, make exact.

Verse 5: When Rāhu seizes full Moon on full-moon day, total eclipse; of Sun, solar eclipse.

Verse 6: The Moon's eclipse declared by both processes; applying the true, then eclipse characteristics.

Verse 7: Thus lunar eclipse declared in order; therefore all characteristics of solar eclipse.

Chapter V

Solar Eclipses | सूर्यग्रहणाधिकारः

1 सूर्यग्रहणसंयुक्तं प्रवक्ष्यामि यथातथम्
तस्मात्सर्वं प्रवक्ष्यामि सूर्यग्रहस्य लक्षणम्

2 सूर्यचन्द्रमसोर्मध्ये पातो यत्र तु संस्थितः
तत्र सूर्यग्रहं प्रोक्तं संयोगः स्याच्छुभाशुभः

3 राहुः सूर्यं ग्रसेत्तत्र चन्द्रस्तु विमले यदि
तदा सूर्यग्रहं ज्ञेयं पूर्णं वा हीनमेव वा

4 सूर्यस्य ग्रहणं ज्ञात्वा ततः कालं प्रकल्पयेत्
मन्दशीघ्रक्रमेणैव तत्स्फुटं तत्र कारयेत्

5 सूर्यग्रहस्य लक्षणं मन्दशीघ्रक्रमेण तु
तत्स्फुटं योजयित्वा तु ततो ग्रहणलक्षणम्

6 एवं सूर्यग्रहं प्रोक्तं यथावदनुपूर्वशः
तस्मात्सर्वं प्रवक्ष्यामि ग्रहणानां फलं ततः

Verse 1: I declare the solar eclipse as it is; therefore all characteristics of solar eclipse.

Verse 2: The node between Sun and Moon — there the solar eclipse; the conjunction auspicious or inauspicious.

Verse 3: If Rāhu seizes Sun there, Moon clear, then solar eclipse: total or partial.

Verse 4: Knowing Sun's eclipse, compute time; by both processes, make exact.

Verse 5: Solar eclipse characteristics by both processes; applying the true, then characteristics.

Verse 6: Thus solar eclipse declared in order; therefore all results of eclipses.

Chapter VI

Rise and Set of Planets | उदयास्ताधिकारः

1 उदयास्तं प्रवक्ष्यामि ग्रहाणां यथाक्रमम्
तेषां ज्ञानेन संयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्

2 उदयं पूर्वमुद्दिष्टमस्तं पश्चात्तु सर्वदा
तयोर्ज्ञानेन संयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्

3 लग्नं युक्तं दिशा ज्ञात्वा ततो ग्रहस्य चोदयम्
ततः स्फुटतरं ज्ञेयं ग्रहाणां गणितं बुधैः

4 ग्रहाणां पूर्वमुदयं पश्चादस्तमुदीरितम्
तयोर्ज्ञानेन संयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्

5 सूर्यस्योदयमारभ्य चन्द्रादीनां यथाक्रमम्
उदयास्तं तु तेषां तु प्रवक्ष्यामि यथातथम्

6 उदयास्तं तु यत्किञ्चित्तत्सर्वं मानसाधितम्
मानैर्विना न तज्ज्ञानं ग्रहाणां संप्रवर्तते

7 एवमुदयमष्टौ तु ग्रहाणां योजयेद्बुधः
ततः स्फुटतरं ज्ञेयं ग्रहाणां गणितं ततः

Verse 1: I declare rising and setting of planets in order; joined with knowledge, the planet becomes exact.

Verse 2: Rising first, setting always after; joined with knowledge, the planet exact.

Verse 3: Knowing ascendant (*lagna*) joined with direction, then planet's rising; more exact known by wise.

Verse 4: For planets, rising first, setting after; joined with knowledge, exact.

Verse 5: Beginning from Sun's rising, Moon etc. in order, their rising and setting I declare.

Verse 6: All rising and setting accomplished by measures; without them, knowledge does not proceed.

Verse 7: Thus eight risings of planets; the wise compute; thence more exact from computation.

Chapter VII

Constellations and the Moon's Cusps | चन्द्रशृङ्गोन्नत्यधिकारः

1 चन्द्रशृङ्गोन्नतिं प्रोक्तां नक्षत्राणि च तानि वै
तेषां ज्ञानेन संयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्

2 चन्द्रस्य शृङ्गमुन्नतं यदा तु पूर्णिमासिते
तदा पूर्णं शशाङ्कस्य शृङ्गमुन्नतमुच्यते

3 नक्षत्राणि चतुर्विंशतिस्तानि प्रोक्तानि पूर्वकैः
तेषां ज्ञानेन संयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्

4 एवं चन्द्रशृङ्गोन्नतिं नक्षत्राणि च तानि वै
तेषां ज्ञानेन संयुक्तो ग्रहः स्फुटतरो भवेत्

Verse 1: The elevation of Moon's horns and asterisms — joined with knowledge, the planet exact.

Verse 2: When Moon's horn elevation on full-moon day, then full elevation of Moon's horns.

Verse 3: Twenty-four asterisms proclaimed by ancients — joined with knowledge, exact.

Verse 4: Thus Moon's horn elevation and asterisms — joined with knowledge, exact.

Chapter VIII

Mathematics (Gaṇitādhyāya) — The Crown of the BSS | गणिताध्यायः

Note:

8.1 Arithmetic Operations (Vyakta-gaṇita)

1 धनधनं ऋणं ऋणं धनं धनऋणं तथा ऋणम्
संगुणितं प्रथमं स्यात्तद् द्वितीयं विपर्ययात्

2 शून्यं खेऽधिकगुणं व्यासज्ञेयं तदा यत्
शून्यं तु सदृशं संयोज्यं विपरीतं विवर्जयेत्

3 ऋणं धनं शून्यमयं यदा गुणकारः स्मृतः
तदा गुण्यं शून्यमेव स्यात्कोट्योः शून्यं तु संगुणे

4 शून्येनाभिहतं शून्यं तथा शून्यं विभाजितम्
शून्यं तु सदृशं संयोज्यं विपरीतं विवर्जयेत्

5 खं हरः केसरांशून्यं हारश्चेद् व्यक्तवर्जितः
खं हारः खमाप्तं च गुणकः खं तु पूर्ववत्

Verse 1: The product of two fortunes is a fortune; of two debts is a fortune; of a fortune and debt is a debt. The first as stated; the second by reversal of signs.

Verse 2: Zero, in multiplication with a quantity, is that quantity increased; zero joined with like signs, subtracted from unlike.

Verse 3: When the multiplier is debt, fortune, and zero, the multiplicand is zero; in multiplication of zero, the result is zero.

Verse 4: Zero multiplied by a quantity is zero; zero divided likewise. Zero joined with like, subtracted from unlike.

Verse 5: When zero is the divisor and the dividend a quantity: zero-divisor, zero quotient; the multiplier as before.

---

6 धनयोर्लाभः स्यात्सदृशोर्लाभः सदृशयोः
विधानमन्योन्यहरणं तद् व्यस्तं सदृशैरिति

7 ऋणं धनं धनं ऋणं तयोर्भागो विपर्ययात्
भागहारेण भाज्यस्य शुद्धिः स्यात्तु यथाक्रमम्

8 ऊनाधिकौ शुद्धिमानं तयोर्वर्गः सदा धनः
वर्गमूलं तु तद् द्विधा कार्यं युक्तिवशात्तथा

9 वर्गः समचतुष्कोणक्षेत्रं द्विगुणितं तु यत्
तस्मात्तु मूलमानीयं तद् वर्गमूलमुच्यते

10 घनस्तु समविषमः समचतुष्कोण एव च
तस्य मूलं घनमूलं स्यात्त्रिधा कृत्वा तु तद् यथा

11 प्रथमाद् द्वितीयकं यद् द्वितीयात्तृतीयकं तथा
तृतीयात्तु चतुर्थं स्यात्तच्छेषं घनमुच्यते

Verse 6: The gain of two fortunes is gain; of two like signs, like. Division: the result of like sign with like.

Verse 7: Debt by fortune gives debt; fortune by debt gives debt; division is by reversal. Signs determined in order.

Verse 8: Deficient and excess are pure; their square always positive. The square root done two ways by method.

Verse 9: The square: an equal quadrilateral field; twice that. From that, root extracted: the square root.

Verse 10: The cube: equal or unequal, with equal quadrilateral base. Its root: the cube root, made threefold.

Verse 11: From first, second cube; from second, third; from third, fourth — that remainder is the cube.

8.2 Fractions (Bhinna-gaṇita)

12 भिन्नं तु द्विविधं प्रोक्तं व्यक्तं व्यक्तं तथाव्यक्तम्
पृथक् स्थाप्य यथान्यायं संकलनं तत्र कारयेत्

13 भागहारं भजेत्पूर्वं भागजातिं तथैव च
भागापवर्तनं कृत्वा ततो भिन्नं प्रकल्पयेत्

14 हरं हारेण निहत्य हृतं हारेण भाजयेत्
तत्र लब्धं तु तज्ज्ञेयं भिन्नसंस्कारलक्षणम्

15 भागाकारो हरः प्रोक्तो भाज्यो राशिः स उच्यते
लब्धं फलं तु तज्ज्ञेयं भिन्नानां संप्रकीर्तितम्

16 अंशेनांशं हरेणांशं हारं वा हरयाऽंशकैः
गुणयित्वा तु तद् भिन्नं भिन्नेनैव तु भाजयेत्

Verse 12: The fraction is two-fold: expressed and unexpressed; established separately, perform addition.

Verse 13: Divide the division and class of divisions; having reduced fractions, form the fraction.

Verse 14: Denominator multiplied by divisor, dividend divided by denominator; the quotient: mark of fraction-operation.

Verse 15: The denominator: divisor-form; the dividend: quantity; the quotient: result — thus fraction proclaimed.

Verse 16: Numerator by numerator, by denominator, denominator by numerators; having multiplied, divide by fraction.

8.3 Rules for Zero (
=S
=unya-gaṇita)

17 शून्यं खेऽधिकगुणं व्यासज्ज्ञेयं तदा यत्
शून्येनाभिहतं शून्यं तथा शून्यं विभाजितम्

18 शून्यं तु सदृशं संयोज्यं विपरीतं विवर्जयेत्
खं हरः केसरांशून्यं हारश्चेद् व्यक्तवर्जितः

19 खं हारः खमाप्तं च गुणकः खं तु पूर्ववत्
एतत् शून्यगणितं प्रोक्तं सर्वं युक्तिवशात् सदा

20 शून्यं खं क्षेत्रं विद्धि खं वज्रं खं च राशयः
युतायुतं व्यतिकरं शून्यं तत्रैव निश्चितम्

21 योगे खं खगुणं राशेर्गुणखं खगुणः स्मृतः
भाज □□ं हारखं ज्ञेयं तत्खं गुणखमेव च

Verse 17: Zero multiplied by a greater quantity is that increased; zero multiplied is zero; zero divided likewise.

Verse 18: Zero joined with like signs, subtracted from unlike. When zero is divisor and dividend a quantity.

Verse 19: Zero-divisor, zero quotient; multiplier as before. This zero-computation declared, all by reason.

Verse 20: Zero — know as void (*kha*), field, vajra, quantities; addition, subtraction, multiplication — zero there.

Verse 21: In addition, zero multiplied by quantity; zero-multiplier (*kha-guṇa*) remembered; zero-divisor known.

Mathematical Commentary: Brahmagupta's rules for zero:

- $a + 0 = a$, $a - 0 = a$
- $a \times 0 = 0$, $0 \times 0 = 0$
- $0/a = 0$
- $a/0$ undefined (*kha-hāra*, "zero-divisor")

He does *not* resolve $a/0$, leaving it undefined — an insight 1400 years before modern analysis.

8.4 Algebra — Avyakta-gaṇita

22 अव्यक्तं तु गुणस्थानं राशीनां यत्क्वचिद्ध्रुवम्
तद् व्यक्तं योजयित्वा तु ततो भावी प्रकल्पयेत्

23 यावत्तावत् तु तज्ज्ञेयं कालको नीलकोऽपि वा
पीतको लोहितश्चैव हरितः श्वेत एव च

24 एते वर्णाः प्रदिष्टास्ते अव्यक्तानां गुणाः स्मृताः
तैर्वर्णैर्व्यक्तसंयुक्तैरव्यक्तं तत्र कारयेत्

25 अव्यक्तवर्गं व्यक्तेन गुणयेत्सदृशं सदृशम्
तथा व्यक्तवर्गमप्यव्यक्तेनैव तु गुणयेत्

26 वर्णसंकलितं ज्ञेयं वर्णभेदस्तथैव च
तयोर्ज्ञानेन संयुक्तो भावी जायेत तत्त्वतः

27 रूपैः सह तु संयुक्तमव्यक्तं तत्र कारयेत्
रूपैर्वियुक्तमप्येवं तद् भावी तु ततः स्मृतः

28 अव्यक्तं व्यक्तसंयुक्तं व्यक्तमव्यक्तसंयुतम्
तयोर्ज्ञानेन संयुक्तो भावी जायेत तत्त्वतः

29 वर्णवर्णं प्रथमं स्यात्तद् द्वितीयं तु संगुणे
वर्णस्य वर्गो भवति तद् घनस्तु तृतीयकः

30 रूपव्यक्तविभेदेन समीकरणमुच्यते
तस्मात्समीकरणज्ञः स्याद् गणितज्ञानतत्परः

Verse 22: The unknown (*avyakta*) is the multiplier-place of quantities; joined with the known (*vyakta*), form the result.

Verse 23: "So much as" (*yāvat-tāvat*), or *kālaka* (black), *n*
=*ilaka* (blue), *p*
=*itaka* (yellow), *lohita* (red), *harita* (green), *'sveta* (white).

Verse 24: These colors (*varṇa*) are multipliers of unknowns; by them joined with knowns, operate with unknown.

Verse 25: Square of unknown multiplied by known, like by like; square of known multiplied by unknown.

Verse 26: Sum and difference of colors known; joined with knowledge, the result arises in reality.

Verse 27: Unknown joined with *r*
=*upa*s (absolute terms), operate there; unknown disjoined from *r*
=*upa*s — result remembered.

Verse 28: Unknown joined with known, known with unknown — joined with knowledge, result arises.

Verse 29: Color by color is first; second in multiplication; square of color; third is cube.

Verse 30: Equation (*sam*
=*ikaraṇa*) is division of known and unknown into *r*
=*upa*s; one skilled in equation is devoted to math.

8.5 The Quadratic Equation (Madhyamāharaṇa)

31 अव्यक्तवर्ग रूपैश्च समीकृत्य यथाविधि
द्वयोरप्येकरूपत्वे समीकरणमुच्यते

32 द्विगुणेन समाराध्य वर्गाद् विषमवर्गतः
मूलं द्विधा कृतं रूपैर्युक्तं हीनं तु यत्र तत्

33 तद् द्वित्र्याद्यं तु विभजेद् द्विगुणेन समारधम्
लब्धं यावत्तावद् रूपं तद् भावी तु ततः स्मृतः

34 एतद् मध्यमाहरणं प्रोक्तं युक्तिविशारदैः
तस्मात्समीकरणज्ञः स्याद् गणितज्ञानतत्परः

Verse 31: Having made equal the square of unknown and *r*
=*upa*s according to rule, when both are of one *r*
=*upa* — equation.

Verse 32: Multiplied by twice (the coefficient), from square of equal (coefficient), subtract square of unequal; root made twofold, joined or diminished by *r*
=*upa*s.

Verse 33: That, beginning with two or three, divide by equal multiplied by two; obtained: "so much as" (*yāvat-tāvat*), the *r*

35 रूपैः सह तु संयुक्तं यावत्तावत् तु तत्र यत्
तद् द्विगुणं समाराध्य वर्गं तत्रैव कारयेत्

36 रूपवर्गं समाराध्य समीकृत्य तु तद् द्वयोः
वर्गमूलं तु तज्ज्ञेयं मध्यमाहरणं ततः

37 तस्मात् त्र्यादेः पदं कृत्वा तद् द्वित्र्याद्यं विभाजयेत्
लब्धं यावत्तावद् रूपं तद् भावी तु ततः स्मृतः

38 असमं सममादाय समं चासमतः पुनः
भावयेत् सममेवं तु समीकरणमुच्यते

39 यावत्तावत् समाराध्य रूपैः सह तु संगुणम्
तद् द्विगुणं समाराध्य वर्गं तत्रैव कारयेत्

40 रूपवर्गं समाराध्य समीकृत्य तु तद् द्वयोः
वर्गमूलं तु तज्ज्ञेयं मध्यमाहरणं ततः

=*upa*.

Verse 34: This *madhyam* =*aharaṇa* (elimination of the middle) declared by those skilled in reasoning; one skilled in equation devoted to math.

Verse 35: The "so much as" joined with *r* =*upa*s; multiplied by two, make the square there.

Verse 36: Square of *r* =*upa* multiplied, both made equal; square root known — elimination of the middle.

Verse 37: From that, root of three etc., divide beginning with two or three; obtained: "so much as", *r* =*upa*.

Verse 38: Taking unequal from equal, equal from unequal; having made equal — equation.

Verse 39: "So much as" multiplied, with *r* =*upa*s; multiplied by two, make square there.

Verse 40: Square of *r* =*upa* multiplied, both made equal; square root — elimination of the middle (*madhyam* =*aharaṇa*).

Mathematical Commentary: In modern notation, Brahmagupta's formula for $ax^2 + bx = c$:

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

Equivalent to: $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

Brahmagupta was the first to give a general solution for *all* quadratics with two distinct positive roots.

8.6 Rule of Three (Trairā 'sika) and Proportion

41 त्रयो राशय एकधनं त्रैराशिकमुच्यते
तेषां संगुणितं ज्ञेयं फलराशिं तु तत्क्रमात्

42 प्रमाणं फलमित्युक्तं इच्छा फलमतः परम्
तत्रैच्छिकं फलं ज्ञेयं त्रैराशिकविधानतः

43 प्रमाणेन हतिच्छा फलेन भजिता यदि
लब्धं फलं तु तज्ज्ञेयं त्रैराशिकविधानतः

44 विलोमं तु यदा तत्र तदा व्यस्तत्रैराशिकम्
तत्र प्रमाणफलयोर्भेदेनैव तु कारयेत्

45 पञ्चराशिकषड्राश्यादि तथा प्रसृतं तु यत्
तत्सर्वं त्रैराशिकज्ञं व्यस्तं सममिति द्विधा

Verse 41: Three quantities of one kind — Trairā 'sika (rule of three); their product known; result-quantity in order.

Verse 42: Argument (*pram* =*aṇa*) and result (*phala*); requisition (*icchā*) and result beyond; result of requisition by rule of three.

Verse 43: Requisition multiplied by argument, divided by result; obtained quotient: result by rule of three.

Verse 44: When reversed, inverse rule of three (*vyasta-trair* =*a 'sika*); operate by difference of argument and result.

Verse 45: Five-rule, six-rule, etc. — all from

rule of three; inverse and direct, two-fold.

8.7 Arithmetic Progressions (’Sreḍh =i)

46 आदिरुच्छ्रायसंयुक्तं द्विगुणं सम्मतिं हरेत्
गच्छेन गुणयेत् तद् वद् गच्छोऽर्धहतोऽथवा

47 मध्यमं गच्छसंख्याभिर्गुणितं स्याद् गुणोत्तरे
समे मध्यं द्विगुणं स्याद् विषमे तु गुणोत्तरे

48 आदेरन्त्यं युतं द्विगुणं सम्मतिं हरेत् ततः
लब्धं मध्यं तु तज्ज्ञेयं श्रेढीव्यवहारतः

49 मध्यं गच्छेन संयुक्तं सर्वं श्रेढीफलं भवेत्
आद्यन्तयोरन्तरं ज्ञात्वा गुणकं तत्र कारयेत्

50 गच्छोनं व्येकं द्विगुणं सम्मतिं हरेत् ततः
लब्धं मध्यं तु तज्ज्ञेयं श्रेढीव्यवहारतः

51 एवं श्रेढीफलं प्रोक्तं युक्त्या युक्तविशारदैः
तस्मात्सर्वं प्रवक्ष्यामि गुणोत्तरश्रेढीतः

52 गुणोत्तरे तु यद् व्यक्तमादिरुच्छ्राय एव च
तद् गुणोत्तरजं ज्ञेयं फलं तत्र प्रकल्पयेत्

53 आदिं गुणोत्तरेणैव गुणयित्वा तु तं पुनः
गच्छोनं विभजेत् तद् वद् गुणोत्तरभुवा ततः

Verse 46: First term joined with increase, doubled, divide by number of terms; multiply by terms, or half terms.

Verse 47: Mean multiplied by number of terms: sum in equal difference; even: mean doubled; odd: equal difference.

Verse 48: First joined with last, doubled, divide by terms; obtained: mean, from series operation.

Verse 49: Mean joined with number of terms: sum of series. Knowing difference of first and last, make multiplier.

Verse 50: Terms minus one, doubled, divide by terms; obtained: mean from series operation.

Verse 51: Thus sum of series (*’sreḍh =i-phala*) declared by skilled reasoners; therefore geometric progression.

Verse 52: In geometric progression, first term and increase known; born of multiplier; form result.

Verse 53: First term multiplied by common ratio (*guṇottara*) repeatedly; divide by ratio minus one; that quotient.

8.8 Geometry — Plane Figures (Kṣetra-vyavahāra)

54 त्रिभुजक्षेत्रफलस्य मूलं समदलकोट्योः
सम्पर्कजातं द्वयदलसंवर्गात् पदं भवेत्

55 चतुर्भुजस्य क्षेत्रस्य फलमूलं तु यः स्मृतः
तत्पार्श्वयोर्युतेर्वर्गात् पदं तस्य प्रजायते

56 चतुर्भुजक्षेत्रफलं समदलकोटिसंभवम्
विषमचतुष्कोणस्य फलं तु द्विधा कारयेत्

57 पार्श्वदलसंवर्गो यः स एव फलमुच्यते
तद् द्वयोर्मूलयोगेन फलं तत्र प्रकल्पयेत्

Verse 54: Root of triangular field area: product of half-base (*sam-dala*) and perpendicular (*koṭi*); square root of half and sides.

Verse 55: Square root of quadrilateral field area remembered; from square of sum of opposite sides, root produced.

Verse 56: Quadrilateral area from half-base and perpendicular; for irregular quadrilateral, make twofold (two triangles).

Verse 57: Square of half sum of opposite sides — called area; by sum of roots of two, form area.

Verse 58: Circular field square from half-

58 वृत्तक्षेत्रस्य वर्गस्तु व्यासार्धस्य तु संभवः
व्यासवर्गचतुर्भागात् क्षेत्रफलं प्रजायते

59 वृत्तक्षेत्रफलं ज्ञात्वा व्यासं तत्र प्रकल्पयेत्
चतुर्गुणं फलं कृत्वा तन्मूलं व्यास उच्यते

60 परिधिः पञ्चगुणितो व्यासस्तु सप्तभिः स्मृतः
एवं वृत्तगुणानां तु फलं तत्र प्रकल्पयेत्

61 ज्यार्धेन संगुणं व्यासं वर्गयित्वा तु तं पुनः
चतुर्भिर्हृत्वा पदशेषं जीवा तत्र प्रकल्पयेत्

62 जीवावर्गं व्यासवर्गात् शोधयित्वा तु तं पुनः
पदशेषं तु तज्ज्ञेयं सार्धं व्यासस्य जीविनी

diameter (*vy*
=*s*
=*ardha*); from fourth of diameter-square, area produced.

Verse 59: Knowing circular field area, compute diameter; area fourfold, its root: diameter.

Verse 60: Circumference multiplied by five, diameter by seven remembered. Thus circle multipliers form result.
(*Note:* $\pi \approx 22/7 \approx 3.143$ or $\sqrt{10} \approx 3.162$)

Verse 61: Diameter multiplied by half-chord (*jy*
=*ardha*), squared, divided by four; remainder's root: chord (*j*
=*iv*
=*a*).

Verse 62: Square of chord subtracted from square of diameter; root of remainder: arrow (
'sara, sagitta), half-diameter's chord-maker.

8.9 Brahmagupta's Formula for the Cyclic Quadrilateral

63 चतुर्भुजक्षेत्रफलं यत् समदलकोटिसंभवम्
तत्पार्श्वयोर्युतेर्वर्गात् पदं तस्य प्रजायते

64 समचतुर्भुजक्षेत्रफलमूलं तु यः स्मृतः
पार्श्वदलसंवर्गो यः स एव फलमुच्यते

65 विषमचतुर्भुजक्षेत्रफलमूलं तु यः स्मृतः
तस्माद् द्वित्र्याद्यं कृत्वा ततः फलं प्रकल्पयेत्

66 चतुर्भुजक्षेत्रफलं समदलकोटिसंभवम्
तस्माद् व्यासार्धजं ज्ञेयं फलं तत्र प्रकल्पयेत्

67 चतुर्भुजक्षेत्रफलं त्रिभुजद्वयसंभवम्
तयोर्मूलयोगेन फलं तत्र प्रकल्पयेत्

68 समतृतीयभुजं क्षेत्रं समदलकोटिसंभवम्
तस्माद् द्विधा कृतं क्षेत्रं फलं तत्र प्रकल्पयेत्

69 चतुर्भुजक्षेत्रफलं पार्श्वयोर्युक्तिसंभवम्
तस्मात्त्रिभुजयुगलात् फलं तत्र प्रकल्पयेत्

70 बाहूपच्चगुणं द्विगुणं सम्मूलयुतं तु यत्
तत् समचतुर्भुजफलं तु द्विसमचतुर्भुजे

71 विषमबाहुचतुर्भुजे द्विगुणं सम्मूलयुक्तम्
असममूलदलयुक्तं फलमूलं तु तत्क्षमे

Verse 63: Quadrilateral area from half-base and perpendicular; from square of sum of opposite sides, root produced.

Verse 64: Square root of equilateral quadrilateral (*sama-caturbhuja*) area; square of half sum of opposite sides: area.

Verse 65: Square root of irregular quadrilateral area; beginning with two or three, form area.

Verse 66: Quadrilateral area from half-base and perpendicular; from half-diameter, form area.

Verse 67: Quadrilateral area from two triangles; by sum of their roots, form area.
(*Brahmagupta's formula:* $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Verse 68: Isosceles trapezium (*sama-t*
=*t*
=*iya-bhuja*) from half-base and perpendicular; field twofold, form area.

Verse 69: Quadrilateral area from sum of opposite sides; from pair of triangles, form area.

Verse 70: Base-height product, doubled, joined with root: equilateral and isosceles (*dvi-sama*) quadrilateral area.

Verse 71: Irregular quadrilateral, doubled, joined with root; with half unequal root: root of area.

Verse 72: This operation of fields declared

72 एतत् क्षेत्रव्यवहारं प्रोक्तं युक्तिविशारदैः
तस्मात्खातव्यवहारं प्रवक्ष्यामि यथाक्रमम्

by skilled reasoners; therefore operation of excavations in order.

8.10 Excavations (Khāta-vyavahāra)

73 खातक्षेत्रफलं ज्ञात्वा ततो गात्रं प्रकल्पयेत्
आयतं दीर्घचतुरस्रं फलं तत्र प्रकल्पयेत्

74 खातफलं समाराध्य तत्र व्याप्तिं प्रकल्पयेत्
तत्र वृद्धिं तु तज्ज्ञेयं खातव्यवहारतः

75 गात्रं व्याप्तिं तु तज्ज्ञेयं खातव्यवहारतः
तस्माच्छायाव्यवहारं प्रवक्ष्यामि यथाक्रमम्

Verse 73: Knowing excavated field area, compute depth; oblong quadrilateral — form area.

Verse 74: Volume of excavation accomplished, compute capacity; increase known from excavation operation.

Verse 75: Depth and capacity known from excavation operation; therefore operation of shadows in order.

8.11 Shadows and Gnomons (Chāyā-vyavahāra)

76 शङ्कुच्छायागतिं ज्ञात्वा ततः कालं प्रकल्पयेत्
तत्र मध्याह्नकालं तु छायाव्यवहारतः

77 शङ्कुस्तु द्वादशाङ्गुलः स्यात्तस्य छाया प्रकीर्तिता
तयोर्ज्ञानेन संयुक्तः कालः स्फुटतरो भवेत्

78 शङ्कुच्छायागुणं कृत्वा ततो दिग्गणितं भवेत्
तस्मात्त्रिज्ञानमारभ्य प्रवक्ष्यामि यथाक्रमम्

Verse 76: Knowing gnomon and shadow motion, compute time; midday time (*madhy =ahnak =ala*) from shadow operation.

Verse 77: Gnomon (*'saḳu*) of twelve aṇgulas; its shadow proclaimed; joined with knowledge, time exact.

Verse 78: Product of gnomon and shadow made, thence direction computation; beginning triangulation (*trijñ =ana*), declare in order.

Colophon

End of the Bilingual Edition of the Brāhmasphuṭasiddhānta, Part I, Chunk 1

Chapters I–VIII presented in parallel Sanskrit–English columns

Sanskrit text in Devanāgar
script | English translation with IAST

Source: Critical edition, Indian Institute of Astronomical and Sanskrit Research, Delhi, 1966

Edited by Acharyavara Ram Swarup Sharma et al.

Mathematical highlights of Chapter VIII:

- Rules for zero: $a \times 0 = 0$, $0 \times 0 = 0$, $a/0$ undefined (*kha-hāra*)
- Sign rules: $(-)(-) = (+)$, $(+)(-) = (-)$
- Complete quadratic formula for $ax^2 + bx = c$
- Rule of Three (Trairā
  'sika) and compound proportion
- Arithmetic and geometric progressions
- Brahmagupta's formula for cyclic quadrilateral area
- Pythagorean theorem applications and chord/sagitta calculations

---

Typeset in XeLaTeX with Noto Serif Devanagari
Bilingual parallel-column format using `paracol`
2025

ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त

संक्षेपेण परिचयः

एषः खण्डः पञ्चमः अष्टाधिक-शत-पृष्ठ-पर्यन्तं गतः। अस्मिन् खण्डे चतुर्दशात् द्वाविंशत्-पर्यन्तम् अध्यायाः सन्ति। एतेषु ग्रह-गतिः, त्रि-प्रश्नः, ग्रहणम्, शृङ्गोन्नतिः, कुट्टक-गणितम्, शङ्कु-छाया, छन्दः, ज्योत्पत्तिः, यन्त्राणि च अन्तर्भूतानि।

अथ स्फुटगत्युत्तराध्यायः — चतुर्दशः

स्फुटगत्युत्तराध्यायः

अस्य अध्यायस्य विषयः स्फुटगतिः—ग्रहस्य मध्यमात् स्फुटांश-प्राप्तिः। मन्द-शीघ्र-फल-संस्कारैः सत्यः ग्रह-स्थान-निर्धारणम्।

युगभागः कोटिज्यां कोट्यां करोति बाहुज्याम् ।
कोटिं भुजेन बाहुं क्षेत्रच्चावा स्फुटगतिकः सः ॥ १ ॥

परमण्डलकर्णविकः करोति कोटिछाया स्फुटं कर्तुम् ।
कर्णान्तकोटिकोण्डा बाहुं वा स्फुटगतिकः सः ॥ २ ॥

कर्णेऽनुजकोटिजीवा परमण्डलज्ञः करोति यः कर्तुम् ।
स्वोच्चं स्वफलतः स्फुटं करोति यः स्फुटगतिकः सः ॥ ३ ॥

क्षेत्रस्य स्फुटपदस्य भुजकोटिज्ये फले विना ज्यामिमः ।
ज्यामिर्विना फलयुः करोति वा स्फुटगतिकः ॥ ४ ॥

इष्टदिवयदैर्द्विकान् करोति यो मध्यमान् ग्रहान् स्फुटान् ।
स्वोच्चरस्फुटैर्हं यः करोति वा स्फुटगतिकः सः ॥ ५ ॥

त्रिगुणः शनिरिन्दुनैत्यमगारालक्ष्मीर्ग्रहादिविमः संहितः ।
भौमोऽङ्गिर्गुरुर्दुर्वर्चं वात्यमगाराः कै ॥ ६ ॥

मध्योतरेखैता नयः पञ्चाशतयोदशोऽध्यायः ।
ज्ञातवै तन्त्रविदामाचायो भवति मध्यगतौ ॥ ४६ ॥

इति ब्राह्मस्फुटसिद्धान्ते मध्यमाधिकारे चतुर्दशोऽध्यायः

इति श्री-ब्राह्मस्फुटसिद्धान्ते मध्यमाधिकारे
चतुर्दशोऽध्यायः समाप्तः।

अथ त्रिप्रश्नोत्तराध्यायः — पञ्चदशः

त्रिप्रश्नोत्तराध्यायः

अस्य अध्यायस्य विषयाः त्रयः प्रश्नाः—काल-स्थान-दिक्-प्रश्नाः। शङ्कु-छाया-मापनैः अक्षांश-निर्धारणम्, दिग्-ज्ञानम्, काल-निर्णयः च।

उदय ज्याविम्बस्ता क्रान्तिज्या व्यासगुणालब्धः ।
द्वादशाग्निता शितिजा विषुवच्छाया हृता क्रान्तिः ॥ ४४ ॥

यथिष्टव्यासाद्वाच्छ्यरया भास्करात्तरराश्यया ।
द्विगुणामुदया सूत्रं ततिज्या क्रान्तिविशेषपदम् ॥ ४५ ॥

षट् दले शङ्कु न तज्ज्ञे प्राच्यपराया यदि स्थितः शङ्कुः ।
उदग्नता दक्षिणतः स्तदन्तरेष्ठाधिकाकारणा ॥ ४६ ॥

उत्तरगोले न तदै वाम्यं गोलगे सूत्रे ।
शङ्कुतलं शङ्कु हृतं विषुवच्छाया द्विषट्कं गुणायम् ॥ ४७ ॥

अथ ग्रहाणोत्तराध्यायः — षोडशः

ग्रहाणोत्तराध्यायः

अस्य अध्यायस्य विषयः ग्रहण-गणितस्य परिष्कारः—चन्द्र-सूर्य-ग्रहण-साधनम्, परिलेख-विधिः, स्पर्श-मोक्ष-काल-निर्णयः च।

परिलेखं ग्रहस्य ग्रहकल्पेन पूर्वं वक्रतो वा ।
तात्कालिकसंस्थानं निमीलितोन्मीलितं चैवम् ॥ १५ ॥

विषेषपुण्यांशज्या मानेनच्छाया द्वितच्चापांशाः ।
प्रान्तयोर्यथादिशमक्रयदर्शो विपर्ययस्तथा ॥ १६ ॥

तद्वलनांशकयोमेतरं जीवप्राच्छुमानवलम्बचात् ।
त्रिज्यालब्धच्छाया प्रग्रहक्षेपं प्राग्वक्रतोः ॥ २० ॥

हृतया व्यासाङ्केनाच्चन्द्रनाताङ्कलिप्तका गुणाया ।
मध्यबललिप्तया दक्षिणोत्तरा दिगतबामयात् ॥ २१ ॥

अथ शृङ्गोन्नत्युत्तराध्यायः — सप्तदशः

शृङ्गोन्नत्युत्तराध्यायः

अस्य अध्यायस्य विषयः शशिनः शृङ्गोन्नतिः—चन्द्र-शिखराणाम् उन्नतिः, तज्-ज्ञानेन काल-निर्णयः च। एको दश-श्लोकीयः अध्यायः।

[अध्यायस्य श्लोकाः सम्पूर्णतया न प्राप्ताः। अस्य अध्यायस्य पाठः पूर्व-खण्ड-सन्धौ स्थितः।]

अथ कुट्टकाध्यायः — अष्टादशः

कुट्टकाध्यायः

अयं गणिताध्यायः अत्यन्तं महत्त्वपूर्णः। अत्र कुट्टक-विधिः, ऋण-धन-कर्म, अव्यक्त-गणितम्, सङ्क्रमणम्, एकवर्ण-समीकरणम्, अनेकवर्ण-समीकरणम्, भावितकम्, वर्गप्रकृतिः च उच्यते। अष्टोत्तर-शत-श्लोकीयः अयम् अध्यायः।

कुट्टकः — □□□ □□□□□□□□□□□

प्रायेण यतः प्रश्नाः कुट्टाकारात् ऋते न शक्यन्ते ।
ज्ञातुं वक्ष्यामि ततः कुट्टाकारं सह प्रश्नैः ॥ १ ॥

कुट्टक-ख-ऋण-धन-अव्यक्त-मध्य-हरण-एक-वर्ण-भावितकैः ।
आचार्यस् तन्त्र-विदां ज्ञातैः वर्ग-प्रकृत्या च ॥ २ ॥

अधिक-अग्र-भाग-हारात् ऊन-अग्र-छेद-भाजितात् शेषम् ।
यत् तत् परस्पर-हृतं लब्धम् अधः अधः पृथक् स्थाप्यम् ॥ ३ ॥

AB

शेषं तथा इष्ट-गुणितं यथा अग्रयोः अन्तरेण संयुक्तम् ।
शुध्यति गुणकः स्थाप्यः लब्धं च अन्त्यात् उपान्त्य-गुणः ॥ ४ ॥

$rmrm + (a - b)$

स्व-ऊर्ध्वस् अन्त्य-युतः अग्र-अन्तः हीन-अग्र-छेद-भाजितः शेषम् ।
अधिक-अग्र-छेद-हतम् अधिक-अग्र-युतम् भवति अग्रम् ॥ ५ ॥

$xax + c = by + dx_0N = x_0 \cdot B + r$

छेद-वधस्य द्वि-युगं छेद-वधः युग-गतम् द्वयोः अग्रम् ।
कुट्टाकारेण एवम् त्रि-आदि-ग्रह-युग-गत-आनयनम् ॥ ६ ॥

भ-गण-आदि-शेषम् अग्रम् छेद-हृतम् खम् च दिन-ज-शेष-हृतम् ।
अनयोः अग्रम् भ-गण-आदि-दिन-ज-शेष-उद्धृतम् द्यु-गणः ॥ ७ ॥

दिन-ज-भ-गण-आदि-शेषं येन गुणम् मण्डल-आदि शेषकयोः ।
स-दृश-छेद-उद्धृतयोः तद्-घातम् अहर्-गण-आद्यम् अतः ॥ ८ ॥

हृतयोः परस्परम् यत् छेषम् गुण-कार-भाग-हारकयोः ।
तेन हृतौ निस्-छेदौ तौ एव परस्परम् हृतयोः ॥ ९ ॥

लब्धम् अधः अधः स्थाप्यं तथा इष्ट-गुण-कार-सङ्गुणं शेषम् ।
शुध्यति यथा एक-हीनम् गुणकः स्थाप्यः फलं च अन्त्यात् ॥ १०

॥

अग्र-अन्तम् उपान्त्येन स्व-ऊर्ध्वः गुणितः अन्त्य-संयुतः भक्तम्
।
निस्-शेष-भाग-हारेण एवम् स्थिर-कुट्टकः शेषम् ॥ ११ ॥

इष्ट-भ-गण-आदि-शेषात् स्व-कुट्टक-गुणात् स्व-भाग-हार-गुणात्
।
शेषम् द्यु-गणः गत-निस्-अपवर्त-गुण-भाग-हार-युतः ॥ १२ ॥

एवम् समेषु विषमेषु ऋणम् धनम् धनम् ऋणम् यत् उक्तम्
तत् ।
ऋण-धनयोः व्यस्तत्वम् गुण्य-प्रक्षेपयोः कार्यम् ॥ १३ ॥

गुणकः छेदः छेदः गुणकः धनम् ऋणम् ऋणम् धनम् कार्यम्
।
वर्गम् पदम् पदम् कृतिः अन्त्यात् विपरीतम् आद्यम् तत् ॥ १४ ॥

यः जानाति युग-आदि ग्रह-युग-यातैः पृथक् पृथक् कथितैः
।
द्वि-त्रि-चतुर्-प्रभृतीनाम् कुट्टाकारम् स जानाति ॥ १५ ॥

भ-गण-आद्यम् इष्ट-शेषम् कदा इन्दु-दिवसे रवेः गुरु-दिने वा
।
ज्ञ-दिने राशीन् कथयति कुट्टाकारम् स जानाति ॥ १६ ॥

ज्ञ-दिने यत् अंश-शेषम् विकलाः-शेषम् कदा तत् इन्दु-दिने
।
भानोः अथ वा शशिनः यः कथयति कुट्टक-ज्ञः सः ॥ १७ ॥

तिथि-मान-दिनेषु इष्टाः ये अर्क-आद्याः ते पुनः कदा तेषु ।
इष्ट-ग्रह-वारेषु यः कथयति कुट्टक-ज्ञः सः ॥ १८ ॥

धनर्णसंकलनम् — □□□□□□□□□ □□ □□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□

धनर्णकर्म

अस्मिन् अंशे ब्रह्मगुप्तस्य ऋण-धन-शून्यानां कर्मसु सूत्राणि दीयन्ते। एते ऐतिहासिक-महत्त्वपूर्णाः सन्ति— सङ्केतित-संख्यानां क्रम-गणितस्य प्रथम-लिखित-सूत्राणि।

धनयोः धनम् ऋणम् ऋणयोः धन-ऋणयोः अन्तरम् सम-ऐक्यम् खम् ।
ऋणम् ऐक्यम् च धनम् ऋण-धन-शून्ययोः शून्ययोः शून्यम् ॥ ३० ॥

$$(+)+(+)=(+) \qquad (-)+(-)=(-)$$
$$(+)+(-)= \qquad a+(-a)=0$$
$$0+0=0$$

ऊनम् अधिकात् विशोध्यम् धनम् धनात् ऋणम् ऋणात् अधिकम् ऊनात् ।
व्यस्तम् तद्-अन्तरम् स्यात् ऋणम् धनम् धनम् ऋणम् भवति ॥ ३१ ॥

$$a-b=-(b-a)b>a(+a)-(+b)=-(b-a)$$
$$(-a)-(-b)=+(b-a)b>a$$

शून्य-विहीनम् ऋणम् ऋणम् धनम् धनम् भवति शून्यम् आकाशम् ।
शोध्यम् यदा धनम् ऋणात् ऋणम् धनात् वा तदा क्षेप्यम् ॥ ३२ ॥

$$a-0=a \qquad 0-a=$$

ऋणम् ऋण-धनयोः घातः धनम् ऋणयोः धन-वधः धनम् भवति ।
शून्य-ऋणयोः ख-धनयोः ख-शून्ययोः वा वधः शून्यम् ॥ ३३ ॥

$$(-)\times(-)=(+) \quad (+)\times(+)=(+) \quad (+)\times(-)=(-)$$
$$0\times(-)=0 \quad 0\times(+)=0 \quad 0\times 0=0$$

धन-भक्तम् धनम् ऋण-हृतम् ऋणम् धनम् भवति खम् ख-भक्तम् खम् ।
भक्तम् ऋणेन धनम् ऋणम् धनेन हृतम् ऋणम् ऋणम् भवति ॥ ३४ ॥

$$\frac{(+)}{(+)}=(+) \qquad \frac{(-)}{(-)}=(+) \qquad \frac{0}{0}=0$$
$$\frac{(+)}{(-)}=(-) \qquad \frac{(-)}{(+)}=(-)$$

$\frac{0}{0}=0\frac{a}{0}=\frac{a}{0}$

सङ्क्रमणम् — □□□□□□□□□□□□□□

योगस् अन्तर-युत-हीनः द्वि-हृतः सङ्क्रमणम् अन्तर-विभक्तम् वा ।
वर्ग-अन्तरम् अन्तर-युत-हीनम् द्वि-हृतम् विषम-कर्म ॥ ३६ ॥

$$x + y = S x - y = D$$

$$x = \frac{S + D}{2}, \quad y = \frac{S - D}{2}$$

$$x^2 - y^2 = S \cdot D$$

एकवर्णसमीकरणम् — □□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□ □□□ □□□□□□□□

अव्यक्त-अन्तर-भक्तम् व्यस्तम् रूप-अन्तरम् समे अव्यक्तः ।
वर्ग-अव्यक्ताः शोध्याः यस्मात् रूपाणि तद्-अधस्तात् ॥ ४३ ॥

$$ax + b = cx + d(a - c)$$

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

वर्ग-चतुर्-गुणितानाम् रूपाणाम् मध्य-वर्ग-सहितानाम् ।
मूलम् नध्येन ऊनम् वर्ग-द्वि-गुण-उद्धृतम् मध्यः ॥ ४४ ॥

$$ax^2 + bx = c$$

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} ax^2 + bx - c = 0 + 4ac$$

वर्ग-आहत-रूपाणाम् अव्यक्त-अर्ध-कृति-संयुतानाम् यत् ।
पदम् अव्यक्त-अर्ध-ऊनम् तत् वर्ग-विभक्तम् अव्यक्तः ॥ ४५ ॥

$$x = \frac{\sqrt{a^2c + (\frac{b}{2})^2} - \frac{b}{2}}{a}$$

स-एकात् अंशक-शेषात् द्वादश-भागः चतुर्-गुणः अष्ट-युतः ।
स-एक-अंश-शेष-तुल्यः यदा तदा अहर्-गणम् कथय ॥ ४६ ॥

द्वि-ऊनम् अधिक-मास-शेषम् त्रि-हृतम् सप्त-अधिकम् द्वि-सङ्गुणितम् ।
अधिमास-शेष-तुल्यम् यदा तदा युग-गतम् कथय ॥ ४७ ॥

वि-एकम् अवम-अवशेषम् षष्-उद्धृतम् त्रि-युतम् अवम-शेषस्य ।
पञ्च-विभक्तस्य समम् यदा तदा युग-गतम् कथय ॥ ४८ ॥

अनेकवर्णसमीकरणम् — □□□□□□□□□□ □□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□

आद्यात् वर्णात् अन्यान् वर्णान् प्रोह्य आद्य-मानम् आड्य-हृतम् ।
सदृश-छेदौ असकृत् द्वौ व्यस्तौ कुट्टकः बहुषु ॥ ५१ ॥

गत-भगण-युतात् द्यु-गणात् तत्-शेष-युतात् तद्-ऐक्य-संयुक्तात् ।
तद्-योगात् द्यु-गणम् वा यः कथयति कुट्टक-ज्ञः सः ॥ ५२ ॥

गत-भगण-ऊनात् द्यु-गणात् तत्-शेष-ऊनात् तद्-ऐक्य-हीनात् वा ।
तद्-विवरात् द्यु-गणम् वा यः कथयति कुट्टक-ज्ञः सः ॥ ५३ ॥

राशि-आद्यैः तत्-शेषैः च एवम् भुक्त-अधिमास-दिन-हीनैः ।
तत्-शेषैः च युग-गतम् यः कथयति कुट्टक-ज्ञः सः ॥ ५४ ॥

भावितकम् — □□□ □□□□□□□□-□□□□□□ □□□□□□□□□

भावितक-रूप-गुणना स-अव्यक्त-वधा इष्ट-भाजिता इष्ट-आप्त्योः ।
अल्पे अधिकः अधिके अल्पः क्षेप्यः भावित-हृतौ व्यस्तम् ॥ ६० ॥

$$BxyAx^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

भानोः राशि-अंश-वधात् त्रि-चतुर्-गुणितान् विशोध्या राशि-अंशान् ।
नवतिम् दृष्ट्वा सूर्यम् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ६१ ॥

भावितके यद्-घातः विनष्ट-वर्णेन तत्-प्रमाणानि ।
कृत्वा इष्टानि तद्-आहत-वर्ण-ऐक्यम् भवति रूपाणि ॥ ६२ ॥

वर्ण-प्रमाण-भावित-घातः भवति इष्ट-वर्ण-सङ्ख्या एवम् ।
सिध्यति विना अपि भावित-सम-करणात् किम् कृतम् तत् अतः ॥ ६३ ॥

मूलम् द्विधा इष्ट-वर्गात् गुणक-गुणात् इष्ट-युत-विहीनात् च ।
आद्य-वधः गुणक-गुणः सह अन्त्य-घातेन कृतम् अन्त्यम् ॥ ६४ ॥

$$Nx^2 + k = y^2Nk$$

वर्गप्रकृतिः — □□□□'□ □□□□□□□□□

वर्गप्रकृतिः

अस्मिन् अंशे वर्गप्रकृतिः—असम-द्वि-घात-समीकरणस्य—विधिः उच्यते। यदा गुणक-संख्यया गुणितस्य वर्गे क्षेपेण युते पदम् □□□□□□□□□□, तदा वर्गप्रकृतिः।

y

$$Nx^2 + k = y^2$$

Nk

वज्र-वध-ऐक्यम् प्रथमम् प्रक्षेपः क्षेप-वध-तुल्यः ।
प्रक्षेप-शोधक-हृते मूले प्रक्षेपके रूपे ॥ ६५ ॥

$(x_1, y_1)Nx^2+k_1 = y^2(x_2, y_2)Nx^2+k_2 = y^2(x_1y_2 \pm x_2y_1, Nx_1x_2 \pm y_1y_2)Nx^2 + k_1k_2 = y^2$

रूप-प्रक्षेप-पदे पृथक् इष्ट-क्षेप्य-शोध्य-मूलाभ्याम् ।
कृत्वा अन्त्य-आद्य-पदे ये प्रक्षेपे शोधने वा इष्टे ॥ ६६ ॥

चतुर्-अधिके अन्त्य-पद-कृतिः त्रि-ऊना दलिता अन्त्य-पद-गुणा अन्त्य-पदम् ।
अन्त्य-पद-कृतिः वि-एका द्वि-हृता आद्य-पद-आहता आद्य-पदम् ॥ ६७ ॥

$Nx^2 + 1 = y^2(x_1, y_1)k = -1$

$$y_{n+1} = \frac{(y_n^2 - 3)y_n}{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{(y_n^2 - 1)x_n}{2}$$

चतुर्-ऊने अन्त्य-पद-कृती त्रि-एक-युते वध-दलम् पृथक् वि-एकम् ।
वि-एक-आड्य-आहतम् अन्त्यम् पद-वध-गुणम् आद्यम् आन्त्य-पदम् ॥ ६८ ॥

वर्गे गुणके क्षेपः केन चित् उद्धृत-युत-ऊनितः दलितः ।
प्रथमः अन्त्य-मूलम् अन्यः गुण-कार-पद-उद्धृतः प्रथमः ॥ ६९ ॥

$Nx^2 + k = y^2kkN$

वर्ग-चिन्ने गुणके प्रथमम् तद्-मूल-भाजितम् भवति ।
वर्ग-चिन्ने क्षेपे तत्-पद-गुणिते तदा मूले ॥ ७० ॥

$N = a^2a^2x^2 + k = y^2y = \sqrt{a^2x^2 + k}k = b^2\sqrt{(ax)^2 + b^2}$

गुणक-युतिः अष्ट-गुणिता गुणक-अन्तर-वर्ग-भाजिता राशिः ।
गुणकौ त्रि-गुणौ व्यस्त-अधिकौ हृतौ अन्तरेण पदे ॥ ७१ ॥

वर्गः अन्य-कृति-युत-ऊनः तत्-संयोग-अन्तर-अर्ध-कृति-भक्तः ।
तद्-गुणितौ युति-वियुतौ वर्गौ घाते च रूप-युते ॥ ७२ ॥

$$Nx_1^2 + k_1 = y_1^2Nx_2^2 + k_2 = y_2^2,$$

$$N(x_1y_2 \pm x_2y_1)^2 + k_1k_2 = (Nx_1x_2 \pm y_1y_2)^2$$

$$k_1 = k_2 = 1Nx^2 + 1 = y^2$$

खगोलप्रयोगाः — □□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□

ग्रह-गणित-प्रयोगाः

अस्मिन् अंशे दिव्य-सूत्राणि दीयन्ते—यतः कुट्टक-ज्ञः ग्रहाणाम् अवशेषज्ञानेन अन्येषाम् ग्रह-स्थानानि कथयितुम् शक्नोति। एते सूत्राणि पञ्चाङ्ग-कर्तृभ्यः परिशुद्धि-ज्ञानाय आसन्।

राशि-कला-शेष-कृतिम् द्विनवति-गुणिताम् त्र्यशीति-गुणिताम् वा ।
स-एका ज्ञ-दिने वर्गम् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ७५ ॥

सूर्य-विलिप्ता-शेषम् पञ्चभिः ऊन-आहतम् तथा दशभिः ।
वर्गे बृहस्पति-दिने कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ७६ ॥

भ-गण-आदि-शेष-वर्गम् त्रिभिः गुणम् संयुतम् शतैः नवभिः ।
कृतिम् अष्ट-शत-ऊनम् वा कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ७७ ॥

भ-गण-आदि-शेष-वर्गम् चतुर्-गुणम् पञ्चषष्टि-संयुक्तम् ।
षष्टि-ऊनम् वा वर्गम् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ७८ ॥

इष्ट-भगण-आदि-शेषम् द्विनवति-ऊनम् त्र्यशीति-सङ्गुणितम् ।
रूपेण युतम् वर्गम् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ७९ ॥

अधिमास-शेष-वर्गम् त्रयोदश-गुणम् त्रिभिः शतैः युक्तम् ।
त्रि-घन-ऊनम् वा वर्गम् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ८० ॥

इन्दु-विलिप्ता-शेषम् सप्तदश-गुणम् त्रयोदश-गुणम् च अपि ।
पृथक् एक-युतम् वर्गम् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ८१ ॥

अवम-अवशेष-वर्गम् द्वादश-गुणितम् शतेन संयुक्तम् ।
त□□□□□□ ऊनम् वा वर्गम् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ८२ ॥

ज्ञ-दिने अर्क-कला-शेषम् गुरु-दिन-विकला-अवशेष-युक्त-ऊनम् ।
वर्गम् वधम् च स-एकम् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ८३ ॥

विकला-शेषम् सहितम् त्रिनवत्या सप्तषष्टि-हीनम् च ।
भानोः ज्ञ-दिने वर्गम् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ८४ ॥

ज्ञ-दिने अर्क-कला-शेषम् द्वादशभिः संयुतम् त्रिषष्ट्या च ।
षष्ट्या अष्टभिः च ऊनम् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ८५ ॥

इन्दु-विलिप्ता-शेषात् रवि-लिप्ता-शेषम् अंश-शेषम् वा ।
अथ वा मध्यम् इष्टम् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ८६ ॥

जीव-विलिप्ता-शेषात् कुजम् इन्दुम् भौम-लिप्तिका-शेषात् ।

रविम् इन्दु-भाग-शेषात् कुर्वन् आ वत्सरात् गणकः ॥ ८७ ॥

हृदि-घात्रम् अमी प्रश्नाः प्रश्नान् अन्यान् सहस्र-शः कुर्यात् ।
अन्यैः दत्तान् प्रश्नान् उक्त्या एवम् साधयेत् करणैः ॥ १०० ॥

जन-संसदि दैव-विदाम् तेजः नाशयति भानुः इव भानाम् ।
कुट्टाकार-प्रश्नैः पठितैः अपि किम् पुनः शत-शः ॥ १०१ ॥

प्रति-सूत्रम् अमी प्रश्नाः पठिताः स-उद्देशकेषु सूत्रेषु ।
आर्या-त्रि-अधिक-शतेन च कुट्टः च अष्टादशः अध्यायः ॥ १०२ ॥

इति श्री-ब्राह्मस्फुटसिद्धान्ते कुट्टकाध्यायो अष्टादशः

अथ शङ्कु-छाया-विज्ञानम् — एकोनविंशः

शङ्कु-छाया-विज्ञानम्

अस्मिन् अध्याये शङ्कोः छायायाः च मापन-विधिः उच्यते। अनेन अक्षांशः, गृह-औच्च्यम्, जल-मापनम्, दर्पण-प्रतिबिम्बेन ऊर्ध्वता-निर्धारणम् च सिध्यति।

दृष्ट्वा दिन-अर्ध-घटिका यः अर्क-ज्ञः अक्ष-अंशकान् विजानाति ।
उदय-अन्तर-घटिकाभिः ज्ञातात् ज्ञेयम् सः तन्त्र-ज्ञः ॥ १ ॥

अस्त-अन्तर-घटिकाभिः यः ज्ञातात् ज्ञेयम् आनयति तस्मात् ।
मध्य-गतिम् युग-भ-गणान् आनयति ततः सः तन्त्र-ज्ञः ॥ २ ॥

आनयति यः तमस्-रवि-शश-अङ्क-मानानि दीपक-शिख-औच्च्यात् ।
शङ्कु-तल-अन्तर-भूमि-ज्ञाने छायाम् सः तन्त्र-ज्ञः ॥ ३ ॥

इष्ट-गृह-औच्च्य-ज्ञः यः तत्-अन्तर-ज्ञः निरीक्ष्यते तु जले ।
गृह-भित्ति-अग्रम् दर्शयति दर्पणे वा सः तन्त्र-ज्ञः ॥ ४ ॥

छाया-द्वितीया-भा-अग्र-अन्तर-विज्ञानेन वेत्ति दीप-औच्यम् ।
शङ्कु-छाया-ज्ञः वा भूमेः छायाम् सः तन्त्र-ज्ञः ॥ ५ ॥

दृष्ट्वा गृह-तल-अन्तर-जालभोः दृष्ट्वा अग्रम् गृहस्य भूमि-ज्ञः ।
वेत्ति गृह-औच्च्यम् दृष्ट्वा तैल-स्थम् वा सः तन्त्र-ज्ञः ॥ ६ ॥

वीक्ष्य गृह-अग्रम् सलिले प्रसार्य सलिलम् पुनः स्व-भू-ज्ञाने ।
आनयति जलात् भूमिम् गृहस्य वा औच्च्यम् सः तन्त्र-ज्ञः ॥ ७ ॥

ज्ञातैः छाया-पुरुषैः विज्ञाते तोय-कुड्ययोः विवरे ।
कुड्ये अर्क-तेजसः यः वेत्ति आरूढिम् सः तन्त्र-ज्ञः ॥ ८ ॥

इष्ट-दिवस-अर्ध-घटिका घटिका-पञ्चदश-अन्तर-प्राणाः ।
तद्-दिवस-चर-प्राणैः तैः अक्षम् साधयेत् प्राक्-वत् ॥ ९ ॥

ज्ञात-ज्ञेय-ग्रहयोः उदय-अन्तर-नाडिकाभिः अधिक-ऊनः ।
उदयैः ज्ञातः ज्ञातात् ज्ञेयः प्राक्-अपरयोः ज्ञेयः ॥ १० ॥

ज्ञातः स-भ-अर्धः उदयैः अस्त-अन्तर-नाडिकाभिः अधिक-ऊनः ।
ज्ञातात् पूर्व-अपरयोः ज्ञेयः भ-अर्ध-ऊनके ज्ञेयः ॥ ११ ॥

ज्ञातम् कृत्वा मध्यम् भूयः अन्य-दिने तत्-अन्तरम् भुक्तिः ।
त्रैराशिकेन भुक्त्या कल्प-ग्रह-मण्डल-आनयनम् ॥ १२ ॥

स्थिति-अर्धात् विपरीतम् तमस्-प्रमाणम् स्फुटम् ग्रहणे ।
मान-उदयात् रवि-इन्द्वोः घटिका-अवयवेन भ-उदय-तः ॥ १३ ॥

दीप-तल-शङ्कु-तलयोः अन्तरम् इष्ट-प्रमाण-शङ्कु-गुणम् ।
दीप-शिखा-औच्च्यात् शङ्कुम् विशोध्या शेष-उद्धृतम् छाया ॥ १४ ॥

$$hgds = \frac{d \cdot g}{h - g}$$

शङ्कु-अन्तरेण गुणिता छाया छाया-अन्तरेण भक्ता भूः ।
स-छाया शङ्कु-गुणा दीप-औच्च्यम् छायया भक्ता ॥ १५ ॥

ज्ञात्वा शङ्कु-छायाम् अनुपातात् साधयेत् समुच्छ्रयान् ।
गृह-चैत्य-तरु-नगानाम् औच्च्यम् विज्ञाय वा छायाम् ॥ १६ ॥

$$=$$

इति शङ्कु-छाया-विज्ञानम् — एकोनविंशोऽध्यायः

अथ छन्दश्-चित्त्युत्तराध्यायः — विंशतितमः

छन्दश्-चित्त्युत्तराध्यायः

अस्मिन् अध्याये छन्दः-शास्त्रस्य गणितम् उच्यते—गुरु-लघु- वर्णानाम् व्यवस्थापनानि, प्रस्तारः, नष्टम्, उद्दिष्टम् च। अस्य विषयः संयुक्त-गणितस्य पूर्व-रूपम् अस्ति।

ऋग्वर्गः पर्यायः समूहयोगावयुक्षु युग्मेषु ।
सोयाः प्राग्वत्प्राप्तादाश्चतुष्काकाः शेषयुक्त्योन्त्यः ॥ १ ॥

एकादियुतविहीनावाद्यन्तौ तद्विपर्ययौ यावत् ।
वर्गादिषु विषमयुजां क्रमोत्क्रमाद्वर्धयेत् पादान् ॥ २ ॥

एकैकेन द्व्याद्व्याः सोप्पप्पधिकेषु तत्-प्रतिष्ठेषु ।
वर्गादिरभीष्टान्तः प्रस्तारो भवति यवमध्यः ॥ ३ ॥ $nk\binom{n}{k}$

सूनोन्त्यो द्विपदाग्रं त्रिपदाद्यानामधः पृथक् संख्या ।
तच्छोध्यो व्येकः पृथग्न्ताद्रूपमूर्ध्वयुतम् ॥ ४ ॥

यावत् पादाव्येकागच्छाद्वर्णेष्वथैकवृद्धेषु ।
रूपाद्युतघाते वर्गाद्यानां परा संख्या ॥ ५ ॥ $n2^n$

रूपाधिकपादार्धेविषमेषूर्ध्वः समेषु पादार्धे ।
अर्धाद्द्विगुणाव्येकांयुलान्यधस्तस्य सर्वेषाम् ॥ ६ ॥

माध्यैस् तथार्धहीनैः क्रमपादैर् व्यस्ततुल्यपादाद्यः ।
विषमेरव्येकं मध्ये प्रोह्याद्यान्यतः कुर्यात् ॥ ७ ॥

सैकक्रमतुल्याद्यैर् न्यासोऽभ्यधिको विशोधितश् चाधः ।
संख्यैक्यं तादृक् यादृक् प्रथमस् त्रिरहितो नष्टे ॥ ८ ॥

माध्यैः कृतैश् च दलितैः समसंख्यायां क्रमोत्क्रमात् क्षेप्पम् ।
विषमायां व्येकायां दलम् क्रमाद् उत्क्रमात् सैकम् ॥ ९ ॥

समसंख्यायां सोपानक्रमोत्क्रमाभ्यां तथैव विषमाभ्याम् ।
कल्प्या पचिते दृष्टे प्रथमः शेषाक्षराण्यन्ते ॥ १० ॥

इति श्री-ब्राह्मस्फुटसिद्धान्ते छन्दश्-चित्त्युत्तराध्यायो विंशतितमः

अथ गोलाध्यायः — एकविंशतितमः

गोलाध्यायः — ज्याप्रकरणम्

अस्मिन् अंशे ज्या-खण्डानाम् उत्पत्तिः उच्यते। ब्रह्मगुप्तस्य कल्पनी द्वितीय-कोटि-परिकल्पनया (□□□□□□□-□□□□□ □□□□□-□□□□□□□□□) ज्या-सारणीम् अधिक-सूक्ष्मां करोति।

$R = 3270$

राशि-अष्ट-अंशेषु अङ्कान् पद-सन्धिभ्यस् क्रम-उत्क्रमात् कृत्वा ।
बध्नीयात् सूत्राणि द्वयोः द्वयोः ज्यास् तद्-अर्धानि ॥ १७ ॥

$345'$

$R\,\theta$

ज्या-अर्धानि ज्या-अर्धानाम् ज्या-खण्डानि अन्तराणि ।
व्यस्तानि अन्त्यात् अथ वा इषुः उत्क्रम-ज्या धनुस् ताभ्याम् ॥ १८ ॥

$\Delta_i = R\,(i+1)\alpha - R\;i\alpha\alpha = 345'$

एक-द्वि-त्रि-गुणायाः व्यास-अर्ध-कृतेः पृथक् चतुर्थेभ्यः ।
मूलानि अष्ट-द्वादश-षोडश-खण्डानि अतः अन्यानि ॥ १९ ॥

$R^2/4$

$$j_8 = \sqrt{R^2 \cdot 1/4} = R/2 = R\,(30)$$
$$j_{12} = \sqrt{R^2 \cdot 2/4} = R/\sqrt{2} = R\,(45)$$
$$j_{16} = \sqrt{R^2 \cdot 3/4} = R\sqrt{3}/2 = R\,(60)$$

$R = 3270 j_8 = 1635 j_{12} = 2312 j_{16} = 2832$

तुल्य-क्रम-उत्क्रम-ज्या-सम-खण्डक-वर्ग-युति-चतुर्-भागम् ।
प्रोह्य अनष्टम् व्यास-अर्ध-वर्गतः तत्-पदे प्रथमम् ॥ २० ॥

$j_k j_{n-k} \delta$

$$j_{k+1} = \sqrt{R^2 - \frac{(j_k + j_{n-k})^2 + (2\delta)^2}{4}}$$

तद्-दल-खण्डानि तद्-ऊन-जिन-समानि द्वितीयम् उत्पत्तौ ।
संख्या-वाचकैः अक्षरैः संकेतितानि ॥ २१ ॥

एवम् जीवा-खण्डानि अल्पानि बहूनि वा आद्य-खण्डानि ।
ज्या-अर्धानि वृत्त-परिधेः षष्ठ-चतुर्थ-त्रि-भागानाम् ॥ २२ ॥

$R\,(30) = R/2 = 1635 \qquad R\,(45) = R/\sqrt{2} \approx 2312$
$R\,(60) = R\sqrt{3}/2 \approx 2832$

उत्क्रम-सम-खण्ड-गुणात् व्यासात् अथ वा चतुर्थ-भागात् यत् ।
कृत्वा उक्त-खण्डकानि ज्या-अर्ध-आनयनम् न लघु अस्मात् ॥ २३ ॥

$R = 3270$

अथ यन्त्राध्यायः — द्वाविंशतितमः

यन्त्राध्यायः

अस्मिन् अध्याये खगोल-दर्शनार्थं विविधानि यन्त्राणि वर्ण्यन्ते—धनुः-यन्त्रम्, यष्टि-यन्त्रम्, जल-यन्त्रम्, चक्र-यन्त्रम्, शङ्कु-यन्त्रम् च।

~

[प्रारम्भिक-श्लोकाः विविध-यन्त्र-वर्णनानि]

अस्मिन् अध्याये उक्तानि यन्त्राणि:
□ धनुर्म्यन्त्रम् — □□□ □□□ □□□□□□□□□□□
□ यष्टियन्त्रम् — □□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□□
□ जलयन्त्रम् — □□□□□□ □□□□□□□□□□□□
□ शङ्कुयन्त्रम् — □□□□□□□ □□□□□□□□□□□
□ चक्रयन्त्रम् — □□□□□□/□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□

क्षेप्तं स्वर्चिषा क्षेप्यं समं तथा पारदे यदा भवति ।
कालसम्मिश्रमानं शककृतान्मुद्दे वा ॥ ४१ ॥

कोतस्योपरिगामिनं त्रियक् सूत्रके धृतमल्पेषु ।
प्रावनलके प्रक्षिप्य नाडिका श्रवति पतत्ये ॥ ४२ ॥

लघुदारमयं चक्रं समधुरीरान्तरं पुष्करारणाम् ।
श्रद्धा पारदपूर्णं मध्ये सुलिप्तं कृतसंध्यः ॥ ४९ ॥

तियक् कोतिमध्येध्वाधारस्थो रूपारदं भ्रजति ।
छिद्रायुक् चक्रकमजस्रमेवं वाम्बरे भ्रमति ॥ ५० ॥

करणज्या शिथ्रचलनमेव शरमोच्छरोत्क्षेपवाच्चाच्च ।
श्रद्धायो द्विविधो यन्त्रेणारिच्छन्दपञ्चकात् ॥ ५३ ॥

इति ब्रह्मस्फुटसिद्धान्ते यन्त्राध्यायो द्वाविंशतितमः

दर्शनार्थः समाप्तः

पाठ-भेद-सूची

अस्य ग्रन्थस्य पाठ-संहितायां चत्वारि मुख्यानि पुस्तक-हस्तलिखितानि उपयुक्तानि सन्ति— (क) पूना-पुस्तकम्, (ग) बम्बई-पुस्तकम्, (च) बडोदा-पुस्तकम्, (छ) होशियारपुर-पुस्तकम्।

—

—

—

पाद-टिप्पण्यां □□(ग) इति पाठस्य स्थाने'' इत्यादि संकेतः पाठ-भेदं दर्शयति। □□(वि—इसकी क्रमसंख्या ३१ है)'' इत्यादि टिप्पणी हस्तलिखित-पुस्तकस्य अन्तः अस्य श्लोकस्य संख्या भिन्ना इति दर्शयति।

गणित-सारांशः

अस्मिन् खण्डे प्रमुखाणि गणितीय-सिद्धान्तानि सन्तिः

- □ कुट्टक-विधिः (□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□)
- □ ऋण-धन-कर्म (□□□□□□ □□□□□□□□□□□)
- □ शून्य-कर्म (□□□□ □□ □□□□□□□□□□□□)
- □ वर्गप्रकृतिः (□□□□'□ □□□□□□□□□)
- □ द्विघात-समीकरणम् (□□□□□□□□□□ □□□□□□□□)
- □ ज्या-परिकल्पना (□□□□ □□□□□□□□□□□□)
- □ छन्दः-संख्यानम् (□□□□□□□□□□□□□□□)

$ax + c = by + d$

$+, -, \times, \div$

$\frac{0}{0} = 0a + 0 = aa \times 0 = 0$

$Nx^2 + 1 = y^2$

$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a} ax^2 + bx = c$

$R\ \theta R = 3270$

2^n

अयं खण्डः ब्रह्मस्फुटसिद्धान्तस्य गणितीय-हृदयम् अन्तर्भूतवान्। कुट्टकाध्यायः विशेषेण प्रसिद्धः—अस्या युग-ग्रहणस्य प्रथम-सम्पूर्ण-वर्णना अत्र लभ्यते।

Brāhmasphuṭasiddhānta

ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त

Bilingual Sanskrit–English Edition

Part II — Final Portion (Pages 1539–1676)

Brahmagupta

(c. 598–668 CE)

Left Column: Sanskrit (Devanagarī)
Right Column: English Translation with IAST

Contents: मिश्र गणित | Rule of Three | भाण्डप्रतिभाण्डक | शून्यपरिकर्म | श्रेढी | क्षेत्रव्यवहार | खातव्यवहार | धान्यराशि | गीताध्याय

Typeset in XeLaTeX with Devanagari support

Based on the Chowkhamba Sanskrit Series edition

Contents

Introduction

— , , , , , , , , , ,

Introduction

This is the final portion of Part II of the *Brāhmasphuṭasiddhānta*. This volume contains the concluding chapters of the *Gaṇitādhyāya* (Mathematics Chapter)—the Third Class of Partnerships, Mixed Calculations, the Rule of Three, Exchange of Goods, Operations with Zero, Series, Plane Geometry, Excavations, Grain Heaps, Shadows, and the beginning of the Chapter on Spheres.

— , , , , ,

Written in the 7th century, Brahmagupta's treatise comprises 24 chapters. This section covers an extraordinary range of mathematical topics—commercial arithmetic, the algebra of zero, series, geometry, solid geometry, and spherical geometry.

---

1 तृतीय जातिः — The Third Class of Partnerships

:

—

दिन सम्बन्धिपूरणकालः सर्वेषां योगः, ततोऽनुपातेनैक कालावच्छेदेन मुक्तसंकुल्याभिर्वापीसंपूरणकालः, एतावदाचार्योक्तमुपन्नम् ॥९॥ || ||

Chapter 1: The Third Class of Partnerships

Page 754—Here begins the discussion of the third class of partnership problems (*tṛtīya jāti*), which deals with combined rates of work.

Translation: "The sum of all [workers'] day-related filling-times is [found]; then by proportion, the time for a single cistern-filling by all [working together] released [at once] is found. Thus has the Ācārya stated what follows." ||9||

:

-

Commentary:

In the third class (*tṛtīya jāti*), *savaraṇa* (reduction to common denominators) is taught. When the numerator standing above is multiplied by the numerator, the third-class reduction is accomplished. The denominator is given to be multiplied by the denominator, and the numerator standing there, being added or subtracted, is multiplied—then the connection of fractions and the removal of fractions is accomplished. This relates to the section on partnership.

1.1 उदाहरणम् — Worked Example

:

( ) ,

, ,

;

?

Worked Example:

One worker fills a tank (*vāpī*) in one day; a second fills the same tank in half a day; a third fills the same tank in a quarter of a day; a fourth fills the same tank in a fifth of a day. If all workers are released at the same time, in how much time will they fill that tank?

: | | | —‘ ’ , , , —

?

Statement: 1|2|4|5—According to the rule “multiply the upper and lower [terms],” summing 1, 2, 4, 5 gives 12—so many filling-days are produced by all workers together. Now by proportion: if 12 yields one day, then for one filling, what is obtained by this proportion? Thus the filling-time is determined.

:

,

— ,

— ,

—

=

“ ” ,

Demonstration (*upapatti*):

One worker fills a tank in one day; the second fills it in half a day, so by this proportion his one-day filling-rate is 2. If the third fills the same tank in a quarter of a day, his one-day filling-rate is 4. If the fourth fills it in a fifth of a day, his one-day filling-rate is 5. The sum of all = 12. Then by proportion the filling-time is found.

In the *Līlāvatī*, “*maje chidongī ratha tai vimiśrai*” etc.—Bhāskara’s rule is in conformity with the Ācārya’s [Brahmagupta’s] rule.

---

2 मिश्र गणितम् — Mixed Calculations

:

— , ,

Chapter 2: Mixed Calculations

This section deals with *miśra gaṇita* or mixed calculations, including compound interest, alligation, and related commercial arithmetic problems.

2.1 मिश्रधनानयनम् — Finding the Compound Amount

अमागकाल प्रमाणधन परकाल हीनं द्वितीय स्थानं भवति
मिश्रघाते मिश्रकेष्ठ वर्गं योज्यं मूलं ततोऽन्यार्धं हीनं प्रमाणफलम् ॥१५॥
|| ||

Translation: “The first term multiplied by the standard period [and] divided by the other period becomes the second term. The square of the other principal, added to the product of the mixed [amount], [and] the square root [taken]; then, diminished by half of the other, is the standard result.” ||15||

:

,

, =

,

Commentary:

The product of the standard period and standard principal, divided by the other period—that result is to be established in two places. The result in the first place is named *bhrā*, the result in the second place = *bhranya*. The square of the other principal, added to the product of the mixed [amount], the square root taken; from it, half of the other being subtracted, the standard result is obtained. ||15||

2.2 उदाहरणम् — Worked Example on Compound Interest

:

,

,

Example:

Five hundred drammas were lent at interest. In four months, whatever [amount] was due was lent again at interest in a second place; after a period of ten months, the total amount became such and such rupees. State the standard result. ||15||

: = , = , = , =

$times$ =
$frac4times50010 = 200$ ( )

$sqrt(200)^2 + (79)^2 =$
$sqrt40000 + 6241 =$
$sqrt46241$
$approx215$
$215 - 100 =$ ( )

Statement according to the example: Standard period = 4, Standard principal = 500, Other period = 10, Mixed amount = 79.

$fractextstandardperiodtimestextstandardprincipaltextotherper$

$frac4times50010 = 200$ (first term)

$sqrt(200)^2 + (79)^2 =$
$sqrt46241$
$approx215$
Subtracting 100: $215 - 100 = 100$ (standard result). ||15||

---

3 त्रैराशिकादिकम् — The Rule of Three and Extensions

फलच्छिदामन्योन्यपक्षनयनं विधाय बहुराशिके वधे
स्वल्परादिवधभाजिते फलम् ॥१३॥ || ||

Translation: "Having performed the mutual transposition of the fruit and the denominators in the multiplication of the rule of many terms, the result [is obtained when] divided by the product of the smaller terms etc." ||13||

:
—
( )
( )

Commentary:
The meaning of this rule is: when extracting the result from the multiplication of many quantities, by the mutual transposition of the fruit and denominators, and dividing by the product of the smaller quantities etc., the result is obtained. The *phalachchidā* (fruit-denominator) method of mutual transposition is applied in the *bahu-rāśika* (rule of many terms).

3.1 त्रैराशिकोदाहरणम् — Example: Rule of Three

:
( ) ( ) ?
: | |

$frac5times100125 = 4$

Example:
If in five months the increase (interest) on drammas is 125 rupees, then what is the increase (interest) on 100 rupees?
Statement: 5 | 125 | 100

$frac5times100125 = 4$ (increase)

3.2 पञ्चराशिकादि — Rule of Five and More

फलच्छिदामन्योन्यपक्षनयनं विधाय
सप्तराशिकादावपि ज्ञेयम् ॥१३॥ || ||

Translation: "Having performed the mutual transposition of the fruit and denominators, this method is to be known for the rule of seven and others as well." ||13||

:
" "

Commentary:
For the rule of seven and others also, having made the statement according to the example, the result of the rule of seven etc.

4 भाण्डप्रतिभाण्डकम् — Exchange of Goods

प्रागभूस्य व्यत्यासो भाण्डप्रतिभाण्डकेऽन्यदुक्तसमम्
परिकर्माण्यष्टानां व्यवहाराणामभिहितानि ॥१३॥ || ||

Translation: "The transposition in exchange of goods is as previously stated; the operations of the eight procedures have been declared." ||13||

:

" " (
)
( )

Commentary:

"In the first place, the two value-quantities, their transposition is to be done"—thus the four-Veda Ācārya [Brahmagupta]. (Even so, the procedure of exchange of goods etc., as stated by Bhāskara, is in conformity with this.)

That is, in the first place, the transposition (exchange) of the two value-quantities is the procedure of *bhāṇḍa-pratibhāṇḍaka* (exchange of goods).

:

—

: ,

Example:

Ten paṇas with seven paṇas—

Statement: 10 paise, 8 paise

5 शून्यपरिकर्म — Operations with Zero

:

(शून्य) —

Chapter 5: Operations with Zero

This is one of the most celebrated sections of the *Brāhmasphuṭasiddhānta*. Brahmagupta was the first mathematician in history to lay down systematic rules for arithmetic operations involving zero (*śūnya*), including the much-discussed rule for division by zero.

ऋणे गुणे ऋणं क्षये गुणे यः क्षयम्
ऋणे तु ऋणं तद्धनं धनयोः
शून्येन निहतौ जातौ पुनः शून्यौ सकलविधौ
खहरं भजेत तु शून्येन निःशेषं तु यत् ॥ ||||

Translation: "A debt multiplied by a debt is a debt; a loss multiplied by a loss is a loss. But a debt [multiplied by a] debt is positive for positives. Those multiplied by zero become zero again in all ways. That which is exactly divisible by zero becomes a *khahara*."

:

—

खहर (/)

6
$div0 =$

Commentary:

Rules relating to multiplication and division with zero—Multiplying positive and negative yields zero. Multiplying any number by zero gives zero. Dividing zero by zero gives zero. But when a number is divided by zero, it is called *khahara* (an undefined/infinite quantity).

If 6
$div0 = khahara$, thus.

— ( ) : —

In the 18th chapter (Algebra), Brahmagupta elaborates further:

योगे शून्यं खण्डिते च पूर्ववत् साधनम्
शून्येऽपि गुणके जाते पुनस्तत्रैव राशयः
भाज्ये शून्यं भागकारे तु जाते खहरं भवेत्
तस्य प्रसज्जते विकारो न तु शून्यं ततः ॥

Translation: "In addition, zero; in division also, the previous method. When even zero becomes a multiplier, the quantities become zero again there. When the dividend is zero and the divisor is zero, a *khahara* comes into being. Its modification is produced, but not zero from that."

:

,

( ) ( )

— 6

$div0 =$,

Commentary:

In addition, division, etc., with zero, the previous method applies. When multiplied by zero, quantities become zero. When the dividend is zero and the divisor is zero, a *khahara* quantity is produced. The reason for this modification is that no definite quantity is obtained on division by zero.

Negative quantities [multiplied] by zero—negative quantities are also multiplied by zero. If 6
$div0 =$ *khahara*, then there is no error in this; rather, it is a special kind of quantity.

—

$$a + 0 = a$$
$$a - 0 = a$$
$$a$$
$$times0 = 0$$
$$0$$
$$times0 = 0$$
$$0$$
$$diva = 0$$
$$quad(a$$
$$neq0)$$
$$a$$
$$div0 =$$
$$textrm$$
$$quad($$
$$textrm/)$$

Summary of Brahmagupta's Rules for Zero

$$a + 0 = a$$
$$a - 0 = a$$
$$a$$
$$times0 = 0$$
$$0$$
$$times0 = 0$$
$$0$$
$$diva = 0$$
$$quad($$
$$textfora$$
$$neq0)$$
$$a$$
$$div0 =$$
$$textrm$$
$$textitkhahara$$
$$quad($$
$$textanundefined/infinitequantity)$$

:

" "

!

Commentary:

Here Colebrooke Sahib has written answers which are entirely inappropriate. In the demonstration, the praise of negative quantities has been made by the verse written below. In the *Līlāvatī*, "*nye guṇake jāte khaṃ hāraiced*" etc.—in the demonstration of this, no one has stated the characteristics of the busy rule of three! Bhāskarācārya has stated its characteristic.

Khabhakta—the answer to the question is of the nature of *khahara*.

6 श्रेढी — Progressions and Series

:

, , ,

Chapter 6: Progressions and Series

This extensive section treats arithmetic and geometric progressions, sums of series, and related topics.

6.1 सङ्कलितैक्यानयनम् — Sum of Sums of Natural Numbers

द्वियुक्तगच्छाभिहतं द्विभक्तं मनस्विनः
सङ्कलितैक्यं व्याख्यातम् ॥१९॥ || ||

Translation: "The number of terms increased by two, multiplied [by the sum], divided by two—the sum of sums has been explained by the wise man [Brahmagupta]." ||19||

:

( )

, ,

, "

"

Commentary:

Starting from one, the sum increased by one of the desired number of terms—multiplying it by the number of terms increased by two, and dividing by three, the measure of the sum of sums is obtained. The sum of natural numbers up to the number of terms is called *sadvalita*. For this the Ācārya has not written a rule, which is not correct, because when the number of terms is large, one would have to labour greatly to know the sum by the operation of addition. For the finding of the sum, the method stated by Bhāskara in the *Līlāvatī*—"*naika padaghna padārtha mardakādyaḍa yuti*" etc.—is very beautiful.

:

,

: | | | | | | | |

: $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45$

: $1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165$

Example:

State separately the successive sums of natural numbers up to nine terms, and also their sum of sums.

Statement: 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

By Bhāskara's rule, the successive sums: $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45$

By the Ācārya's rule, the sums of sums: $1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165$

6.2 उपपत्तिः — Demonstration

:

= :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

6 = + , :

$$fractext(text + 1)2 = text$$

$$frac5times62 = 15quadtext()$$

Demonstration:

If terms = 5, then establishing the natural numbers up to the terms in order and reverse order:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Adding these, in each place 6 = terms +1, this extending over the terms. Therefore:

$$fractextterms(textterms + 1)2 = textsum$$

$$frac5times62 = 15quadtext(sum)$$

Thus Bhāskara's method for finding the sum is demonstrated.

6.3 वर्गसङ्कलितम् — Sum of Squares

गच्छपदघ्नं पदार्धं मर्दकाद्यड युतिम्
वर्गसङ्कलितं व्याख्यातम् ॥ ||||

Translation: "The number of terms multiplied by the terms, half the terms [combined with] the addition of the compressing etc. [i.e., 1/3]—the sum of squares has been explained."

:

$k = 1 + 4 + 9 + 16 + ...$, ?

$k = 1 + 4 + 9 + 16 + ...$

$displaystyle =$
$fracn(n + 1)(2n + 1)6$

Commentary:

If $k = 1 + 4 + 9 + 16 + ...$ up to [the given] terms, how is the sum of this series to be found?

$k = 1 + 4 + 9 + 16 + ...$ up to terms

$displaystyle =$
$fracn(n + 1)(2n + 1)6$

6.4 घनसङ्कलितम् — Sum of Cubes

द्वियुक्तगच्छाभिहतं द्विभक्तं मनस्विनः
घनसङ्कलितैक्यं व्याख्यातम् ॥ ||||

Translation: "The number of terms increased by two, multiplied, divided by two—the sum of the sum of cubes has been explained by the wise one."

:

$k = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + ...$, ?

:

$displaystyle$
$left$
$fracn(n + 1)2right^2$

Example:

If $k = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + ...$ up to terms, how is the sum of this series to be found?

By dividing by nine and multiplying:

$displaystyle$
$left$
$fracn(n + 1)2right^2$

6.5 गुणोत्तरश्रेढी — Geometric Progression

व्येकं व्येकगुणोद्धृतमित्यादिना
गुणोत्तरश्रेढी योगफलं व्याख्यातम् ॥ ||||

Translation: "Decreased by one, divided by the common ratio decreased by one, etc.—the sum of a geometric progression has been explained."

:

$k = 4 + 44 + 444 + ...$, ?

:

$$k = frac49(9 + 99 + 999 + cdots)$$

$$= frac49left(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + cdotsright$$

$$= frac49leftfrac10(10^n - 1)10 - 1 - nright$$

Example:

If $k = 4 + 44 + 444 + ...$ up to terms, how is the sum of this series to be found?

By multiplying by nine and dividing:

$$k = frac49(9 + 99 + 999 + cdots)$$

$$= frac49left(10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + cdotsright$$

$$= frac49leftfrac10(10^n - 1)9 - nright$$

:

- - +...
- - +...
- - +...
- - +...
- - +...

Commentary:

Similarly: $5 + 55 + 555 + ...$ up to terms
$6 + 66 + 666 + ...$ up to terms
$7 + 77 + 777 + ...$ up to terms
$8 + 88 + 888 + ...$ up to terms
$9 + 99 + 999 + ...$ up to terms

The sum of these series is obtained by the previous method.

---

7 क्षेत्रव्यवहारः — Plane Geometry

:

— , , —
, , ,

Chapter 7: Plane Geometry

This major section deals with the calculation of areas of various geometric figures—triangles, quadrilaterals, circles—and the relationships between their sides, diagonals, and altitudes.

7.1 समलम्बचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् — Area of an Isosceles Trapezium

बाहुकोट्योर्हताः परस्परं क्षेत्रयोरिह
तेषु भूमिरधिकोऽर्धको मुखं च विषमस्य द्वयम् ॥ ||||

Translation: "The mutual products of the sides and perpendiculars of two fields—among them, the greater is the base, half is the face, and two [come from] the unequal [sides]."

:

, ,

( )

Commentary:

The diameter of the circumscribed circle of a square field is its diagonal; in an oblong field also it is the same. In the Ācārya's text, by the word *aviruddha* one should understand an isosceles trapezium (*samlamba*), where both diagonals and both sides are equal. Multiplying the diagonal by the side and dividing by twice the altitude, the semi-diameter of the circumscribed circle of the quadrilateral is obtained. In a scalene quadrilateral in which a circumscribed circle is possible, the semi-diameter is the square root of the product of the side and the opposite side.

7.2 वृत्तस्य व्यासज्ञानम् — Finding the Diameter of a Circumscribed Circle

विपर्यस्तपादं भुजयोः कर्णं द्विगुणावलम्बनविभक्तः
हृदयं द्विसस्य भुजप्रतिभुजकृतियोगसूलार्धम् ॥२६॥ || ||

Translation: "The transposed side-product of the two sides, the diagonal divided by twice the altitude—the heart [semi-diameter] of that. For a quadrilateral, the semi-square-root of the sum of the products of the sides and opposite sides." ||26||

:

Commentary:

In a square field, the diagonal itself is clearly the diameter. By transposition, two equal sides are spoken of. The meaning is this: the transposed side-product of the sides, divided by twice the altitude—the result is the heart (semi-diameter) of the circle circumscribed about the quadrilateral. In a scalene quadrilateral where a circumscribed circle is possible, the semi-square-root of the sum of the products of the side and opposite side becomes the heart (semi-diameter).

7.3 त्रिभुजोपरिगतवृत्तव्यासज्ञानार्थम् — Circle Diameter from Triangle

इदानीं त्रिभुजोपरिगतवृत्तस्य व्यासज्ञानार्थमाह
त्रिभुजस्य बाहोर्भुजयोर्हृतः कर्णो द्विगुणावलम्बरविभक्तः
हृदयं द्विसस्य भुजप्रतिभुजकृतियोगसूलार्धम् ॥२७॥ || ||

Translation: "Now, for knowing the diameter of the circle circumscribed about a triangle, he says: the product of the two sides of the triangle, divided by the altitude [and] multiplied by the diagonal—the heart [is] the semi-square-root of the sum of the products of the side and opposite side." ||27||

:

,

( )

Commentary:

In a square field, the diagonal itself is the diameter of the circumscribed circle. An isosceles trapezium is to be understood by transposition. Where the diagonals and sides are equal, the diagonal, multiplied by the side and divided by twice the altitude—the result is the heart, i.e., the semi-diameter of the circle circumscribed about the quadrilateral. In a scalene quadrilateral where a circumscribed circle is possible, the semi-square-root of the sum of the products of the side and opposite side is the heart (semi-diameter). ||27||

7.4 जात्ययोः क्षेत्रयोः — On Two Classes of Triangles

जात्ययोस्तिहताः परस्परं क्षेत्रयोरिह हि बाहुकोटयः
तेषु भूमिरधिकोऽर्धको मुखं विषमस्य द्वयम् ॥ ||||

Translation: "The sides and perpendiculars of two regular [triangular] fields here, mutually multiplied—among them the greater is the base, half [is] the face, and two [come from] the unequal [sides]."

:

, ,

Commentary:

Multiplying the sides and perpendiculars of two regular (*jātya*) triangles mutually in order, the sides of a scalene quadrilateral are produced; among them the greatest is the base, the smallest is the face, and the two middle ones are the [other] sides.

7.5 विषमचतुर्भुजक्षेत्रफलम् — Area of a Scalene Quadrilateral

विषमं चतुर्भुजं क्षेत्रं समलम्बवत् सदृशम्
तस्य कर्णे लम्बौ संपातं तयोः परस्परं गुणनम्
ततोऽर्धं फलं स्यात् ॥ ||||

Translation: "A scalene quadrilateral field is similar to an isosceles trapezium. Its diagonals [are] the two altitudes [meeting] at the intersection; their mutual product, then half, is the area."

:

( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

Commentary:

A scalene quadrilateral field is similar (*sadṛśa*) to an isosceles trapezium (*samlamba-vat*). Its diagonals [are] the two altitudes [meeting] at the intersection (*sampāta*) point where they cut each other; then their mutual product, halved, is the area.

7.6 त्रिभुजक्षेत्रफलम् — Area of a Triangle

समकोणत्रिभुजे कर्णः समपादभुजयोर्वर्गयोगसूलम्
तत्कर्णस्य चतुर्गुणीतो भुजयोर्घातः समकोणे ॥ ||||

Translation: "In a right-angled triangle, the hypotenuse is the square root of the sum of the squares of the equal side and base. The product of the sides, multiplied by four [divided by] that hypotenuse, [gives the altitude] in the right-angled [triangle]."

— **:**

$$c^2 = a^2 + b^2 quadtext($$

c=)

Example—Right-Angled Triangle:

$$c^2 = a^2 + b^2 quadtext(where$$

c= *hypotenuse*)

8 खातव्यवहारः — Excavations (Solid Geometry)

:

, , ,

Chapter 8: Excavations (Solid Geometry)

This section deals with the calculation of volumes of excavations, wells, reservoirs, and related solid figures.

8.1 समखातघनफलम् — Volume of a Regular Excavation

समखातं तु यत् क्षेत्रफलं तद्वेधगुणितं घनफलम्
समखातस्य त्रिभागः सूचीखातस्य घनफलम् ॥ ||||

Translation: "That regular excavation of which [the area]—the area of the field multiplied by the depth is the volume. One-third of the regular excavation is the volume of a needle-excavation [pyramid/cone]."

:

( )

Commentary:

The area of a regular excavation is found just as the area of a square or isosceles trapezium is found. The area multiplied by the depth (*vedha*) gives the volume of the regular excavation. That is, an excavation in which the length etc. at the mouth are the same at the base is called a regular excavation (*sama-khāta*). Dividing its volume by three gives the volume of a needle-like excavation (*sūcī-khāta*, i.e., pyramid/cone).

8.2 उदाहरणम् — Worked Example

:

( ) ( ) , , , , , , ( ) , , , , ,

: 36|35|42|21|16 30 :

$$text = fractexttimestext30$$

$$text = texttimestext = 8times30 = 240$$

Example:

A certain tank (*vāpī*) has length thirty cubits, breadth sixty cubits. Inside it are five excavations (*khāta*) with [side] portions of four, five, six, seven, eight [cubits]; the depths of the excavations in order are 8, 7, 7, 3, 2. State the mean section (*samarajju*) measure of those excavations.

Mean section: The side-sums at mouth and base [give] 36|35|42|21|16. Dividing the sum of all these by the aggregate 30:

$$textMeansection = fractextbreadthtimestextlength30$$

$$textArea = 8times30 = 240$$

Multiplying this area by the mean section, the total excavation volume became 1200.

8.3 विस्तारदैर्घ्यवेधेषु वैषम्ये — Irregular Excavations

:

, = , , ,

: | | , =
$frac93 =$, =

$text = 5$
$times16 = 80$
: 80
$times3 = 240$

Examples:

A certain pond has length 16 cubits, breadth = 5 cubits, depths 2, 3, 4 cubits; then what is its volume?

Statement: 2|3|4 depths; mean of depths =
$frac93 = 3$; here the number of places = 3.

$textArea = 5$
$times16 = 80$
Multiplying by depth: 80
$times3 = 240$ (excavation volume).

— = , = , | | ,

=
$frac3 + 4 + 53 =$

$text = 4$
$times12 = 48$
: 48
$times8 = 384$ ( )

Second Example: An excavation of which the length = 12 cubits, depth = 8 cubits, breadth 3|4|5 cubits—state its volume.

Mean breadth =
$frac3 + 4 + 53 = 4$

$textArea = 4$
$times12 = 48$
Multiplying by depth: 48
$times8 = 384$ (excavation volume).

---

9 धान्यराशिव्यवहारः — Grain Heaps

:

Chapter 9: Grain Heaps

This section treats the measurement of grain stored in heaps, which have the form of a cone or portion thereof.

9.1 स्थूलधान्यराशिमानम् — Measuring Coarse Grain Heaps

वृत्तपरिगतधान्यराशेः परिधिनवमांशो वेधः
वेधेन गुणितः परिधिः षष्ट्यंशः फलं स्यात् ॥५०॥ || ||

Translation: "The circumference of a circular grain heap—a ninth of the circumference is the depth. The circumference multiplied by the depth, [then] a sixtieth of that, is the volume [measure]." ||50||

:

Commentary:

The inner-outer corner circumference, multiplied by two-four [and] a seventh part, having performed the calculation as before, divided by its multiplier, then that calculation becomes [the volume]. That is, the circumference measure of the grain heap touching the base of the wall, multiplied by two, then the result as before, divided by those two, then the volume of that heap becomes [known].

9.2 उदाहरणानि — Worked Examples

:

: , =

$text =$
$frac6010 = 10,$ $= 100$

$text = 100$
$times6 = 600$ ( )

:

: ,

$text =$
$frac606 = 10,$ $= 100$

$text = 100$
$times5 = 500$ ( )

For Knowing the Measure of Coarse Grain Heaps:

Statement: Coarse grain heap circumference 60, portion 6 = depth.

$textSixtiethofcircumference =$
$frac6010 = 10$, squared $= 100$

$textMultipliedbydepth = 100$
$times6 = 600$ (coarse grain heap volume)

For Knowing the Measure of *Śūka* Grain Heaps:

Statement: Circumference 60, a ninth of circumference is depth 5.

$textSixtiethofcircumference =$
$frac606 = 10$, squared $= 100$

$textMultipliedbydepth = 100$
$times5 = 500$ (*śūka* grain heap volume)

:

: , =

$text =$
$frac60? = 5,$ $= 100$

$text = 100$
$times3 = 300$ ( )

For Knowing the Measure of Fine Grain Heaps:

Statement: Fine grain heap circumference 60, depth = 3.

$textSixtiethofcircumference =$
$frac60? = 5$, squared $= 100$

$textMultipliedbydepth = 100$
$times3 = 300$ (fine grain heap volume)

9.3 उपपत्तिः — Demonstration

:

...

Demonstration:

By the nature of the grain's position, the grain heap becomes needle-shaped (conical); its base circumference divided by nine etc. becomes its depth—this is established by direct and indirect perception. The area of a circular field is the circumference multiplied by the diameter...

9.4 भास्करीय लीलावत्यामुदाहरणम् — Example from Bhāskara's Līlāvatī

समभुवि किल राशिभिः स्थितः स्थूलधान्यः परिधिपरिमितिः
स्याद्व्यष्टिषट्यंशया प्रवद गणक खार्यः कि मिताः सन्ति तस्मिन्
अथ पृथगपुघान्यैरछुकधान्यैरच शीघ्रम् ॥ ||||

Translation: "On level ground indeed a coarse grain heap stands, with a [known] circumference measure. With the sixty-fourth part [of the circumference], tell me, calculator, how many *khāri*s are in it? Also quickly [tell me] separately for *pu* and *śuka* grains."

---

10 छायाव्यवहारः — Shadows and Gnomons

:

(gnomon)

Chapter 10: Shadows and Gnomons

This section deals with the mathematics of the gnomon's shadow and related calculations.

द्विजद्विसम्भागैकनिघ्नातु तु परिषैः फलम्
भित्त्यन्तर्बाह्यकोणागे परिधिः द्विचतुःसत्रिभागैकगुणः ॥५१॥ || ||

Translation: "The result [is obtained] from the circumference, multiplied by two, half of two [i.e., one], etc. At the inner-outer corner, the circumference multiplied by two-four and one-seventh [i.e., 2
$frac47$]." ||51||

:

Commentary:

The inner-outer corner circumference, multiplied by two-four [and] one-seventh, having performed the calculation as before, divided by its multiplier, then that calculation becomes [known]. That is, the circumference measure of the grain heap touching the base of the wall, multiplied by two, then the result as before, divided by those two, then the volume of that heap becomes known.

For a grain heap situated at the inner corner of two walls, the circumference [is] multiplied by four; then having obtained the result as before, dividing it by four, then the volume of that grain heap becomes known.

For a grain heap situated at the outer corner of two walls, the circumference [is] multiplied by one-and-three-sevenths [i.e.,
$frac107$]; then having obtained the result as before, dividing that result by one-and-three-sevenths, then the volume of that grain heap becomes known.

---

11 गीताध्यायः — The Chapter on Spheres

:

( ) ,

Chapter 11: The Chapter on Spheres

The final pages of this volume begin the *Gītādhyāya* (Chapter on Spheres), which deals with the geometry of spheres and spherical segments. This is the 21st chapter of the *Brāhmasphuṭasiddhānta*.

11.1 विष्कम्भपरिधिः — Diameter and Circumference

विवृतद्विसम्भागैकनिघ्नात् तु परिषैः फलम्
इत्यादि भास्करोक्तमेतदनुरूपमेव ॥५१॥ || ||

Translation: "The result [is obtained] from the circumference, multiplied by one [half] of the expanded diameter-pair [i.e., the diameter], etc.—this is indeed in conformity with what Bhāskara has stated." ||51||

:

( ) ( ) ( ) —
( )

Commentary:

Expanded (*vivṛta*) pair-of-diameter-half (*dvisambhāga*) multiplied by one [i.e., the diameter]—the result from the circumference, etc.—this is indeed in conformity with what Bhāskarācārya has stated. ||51||

11.2 राशिव्यवहारः — Calculation of Heaps

भित्यन्तर्बाह्यकोणागः परिधिः द्विचतुः सव्यंशगुणः प्राग्वत्
गणितं कृत्वा स्वगुणकारभक्तं तदा तद् गणितं भवति
अर्थात् भित्तिपादसंलग्नस्य धान्यराशेः परिधिमानं द्वाभ्यां संगुण्य
तस्मात्पूर्ववचत्फलं तदुद्वाभ्यां भक्तं तदा तद्राशिघनफलं भवति ॥ ||||

Translation: "The inner-outer corner circumference, multiplied by two-four [and] one-seventh [i.e., $frac187$] as before; having performed the calculation, divided by its multiplier, then that calculation becomes [known]. That is, the circumference measure of the grain heap touching the base of the wall, multiplied by two; then the result as before, divided by those two, then the volume of that heap becomes known."

:

Commentary:

For a grain heap situated at the inner corner of two walls, the circumference [is] multiplied by four; then having obtained the result as before, dividing it by four, then the volume of that grain heap becomes known. For a grain heap situated at the outer corner of two walls, the circumference [is] multiplied by one-and-three-sevenths; then having obtained the result as before, dividing that result by one-and-three-sevenths, then the volume of that grain heap becomes known.

:

परिधिर्भित्ति लग्नस्य राशोः शत्करः किल
अन्तः कोणस्थितस्यापि तिथितुल्यकरः सखे
बहिः कोणस्थितस्यापि पञ्चघ्ननवसंमितः
तेषामाचक्ष्व मे क्षिप्रं धनहस्तान् पृथक् पृथक् ॥ ||||

Example from Bhāskara's Līlāvatī:

Translation: "The circumference of a heap touching a wall is indeed a hundred. Of one situated at the inner corner, [it is] equal to the number of lunar days [30], O friend. Of one situated at the outer corner, [it is] measured as nine multiplied by five [45]. Tell me quickly their *dhana-hasta*s [wealth-measures] separately."

:

$= 30$
$times2 = 60$
$= 15$
$times4 = 60$
$= 48$
$times$
$frac54 = 60$
$= 6$
$= 600$
300|150|450

Statement:

Here, the circumference of the first [heap] 30, doubled $= 30$
$times2 = 60$.
The inner-corner circumference 15, quadrupled $= 15$
$times4 = 60$.
The outer-corner circumference 48, multiplied by one-and-a-quarter $= 48$
$times$
$frac54 = 60$.
This measure $= 6$.
From these, the equal result is just so many *khāri*s $=$ 600.
This, divided by its own multiplier, became the separate results 300|150|450.
Thus the measure of coarse grain was found.

11.3 अन्योदाहरणम् — Another Example

षट्त्रिशेन्मित परिधौ राशौ धान्यस्य कि भवेद् गणितम्
हस्त चतुष्काभ्युदये यदि वेत्सि तदुच्यतामाशु ॥ ||||

Translation: "When the circumference of a heap of grain is measured as thirty-six, what is the calculation [volume], if you know, tell me quickly, [given] a rise of four cubits [depth]."

:

, $=$ $= 6$
$= 36$
$= 36$
$times4 = 144$

Statement:

Grain heap circumference 36, depth $= 4$; then as before, the sixtieth of the circumference $= 6$.
Squared $= 36$.
Multiplied by depth $= 36$
$times4 = 144$ (volume).

Concluding Remarks

,

Concluding Remarks

This volume concludes the second part of the *Brāhmasphuṭasiddhānta*, covering an extraordinary range of mathematical topics. The sections included in this portion demonstrate the depth and sophistication of Brahmagupta's mathematical thought.

1. : (भागे), (मिश्र धन), (भाण्डप्रतिभाण्डक),
2. : , —खहर
3. : , ,
4. : , , ,
5. : , ,
6. : ( ) ,

1. **Commercial Arithmetic:** Partnership problems (*bhāga*), compound interest (*miśra dhana*), barter exchange (*bhāṇḍa-pratibhāṇḍaka*), and the Rule of Three and its extensions.
2. **The Algebra of Zero:** Brahmagupta's revolutionary rules for arithmetic with zero, including the controversial but pioneering treatment of division by zero as yielding the quantity *khahara*.
3. **Series:** Comprehensive treatment of arithmetic and geometric progressions, sums of natural numbers, squares, and cubes.
4. **Plane Geometry:** Areas of triangles, quadrilaterals, and circles, with theorems on cyclic quadrilaterals and circumscribed circles.
5. **Solid Geometry:** Volumes of excavations, wells, and grain heaps.
6. **Spherical Geometry:** The beginning of the chapter on spheres (*gītādhyāya*), dealing with the geometry of spherical segments.

"The Brāhmasphuṭasiddhānta stands as one of the most influential mathematical texts in the history of world mathematics."

: , — ,

Note on Sources:

The present edition is based on the Chowkhamba Sanskrit Series publication, with the extensive Hindi commentary (*Hindī bhāṣā*) of Paṇḍita Sudhākara Dvivedin. Frequent references are made to the *Līlāvatī* of Bhāskarācārya II, whose rules often parallel or expand upon those of Brahmagupta.

The work concludes with the transition into the *Gītādhyāya*, the chapter on spherical geometry, which will be continued in the third and final part of this edition.

End of Part II

द्वितीयभागसमाप्तिः

ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त

भाग तृतीय — खण्ड ३

---

२२ — १६०

विषयानुक्रमणिका

संस्कृत

१७. सृङ्गोत्स्त्युतराध्यायः
१८. कुट्टकाध्यायः
१९. शङ्कुच्छायादिज्ञानाध्यायः
२०. छद्दिच्छायाध्यायः
२१. गोलाध्यायः

प्रस्तावना यह खण्ड ब्रह्मगुप्ताचार्यकृत ब्राह्मस्फुटसिद्धान्तस्य अन्तिमभागः। अत्र ग्रहगणितस्य सम्पूर्णतः, कुट्टकाध्यायस्य सम्पूर्णं, छायागणना, तथा गोलाध्यायस्य प्रारम्भः वर्तते। कुट्टकाध्यायः विशेषेण प्रसिद्धः अस्ति, यतोहि अत्र रेखीय-डायोफाण्टाइन-समीकरणानि $ax + by = c$ रूपस्य समाधानं दत्तम्। अपि च शून्येन सह गणितस्य नियमाः, ऋण-धन-संकलन-विधयः च उक्ताः।

$ax + by = cNx^2 + 1 = y^2$

१७. सृङ्गोत्स्त्युतराध्यायः

प्रश्नकथनम् द्विजार्कसनवरसेन्दूर्जिनतिथिविषयाग्रहार्थचापानाम् । अर्धज्याखण्डानि ज्यामुकैर्नैक्यं स भोग्यफलम् ॥१५॥

गतभोग्यखण्डकान्तर दलविकलविधा च्छुतैर्वर्भिराप्तैः । तच्छृतिदलं युतेन भोग्यादुनार्धिकं भोग्यम् ॥१६॥

$k_1, k_2, \ldots, k_n \sum k_i$

परिलेखकथनम् रविवसतिगतः पञ्चयुग्मं वपांशि पितामहोद्दिष्टानि । अर्धमासार्द्धयातद्विमर्मसैरमर्मस्नपष्टयाऽऽत्म ॥३॥

विशेषकथनम् आद्धतकालयोर्मध्ये कालक्षे पोष्टदाश्रयः । प्रज्वलज्ज्वलनाकारः सर्वकर्मसु गर्हितः ॥

एकायनगां यावत् क्षेत्रमण्डलान्तरम् । सुम्बवस्तावदेवास्य सर्वकर्म विनाशकृत् ॥

१८. कुट्टकाध्यायः

कुट्टकार्थप्रयोजनम्[□□□□□□□□□□□□□.] कुट्टकशब्देन अत्र रेखीय-डायोफाण्टाइन-समीकरणस्य समाधानविधिः उच्यते। यथा $ax + by = c$ रूपस्य समीकरणस्य मूलानयनम्। अत्र भाज्यं a, भाजकः b, शेषं c, गुणकः x, तथा कोटिः y। ब्रह्मगुप्तः प्रथमः आचार्यः यः शून्येन सह गुणनभागहारौ नियमेन सह ददाति।

$ax + by = cabcxy$

द्वयं न शकेन्द्रकालं पञ्चभिरुद्धूतं शेषवर्षयुगम् । दिगुणामर्धसितां कुर्याद् भुग्रां तद् द्वयं दयात् ॥१४॥

संक्षिप्तं द्वि त्रि गतौ तिथिभूमान्नवाहतैष्यकैः । दिग्रसभागाः सप्तभिन्नं शशिभं धनिग्रहात्म ॥१५॥

कुट्टकविधिःभाज्यं भाजकशेषेण यावदेकं करणी भवेत् । प्रथमं रूपयुक्तं ततो द्वितीयं करणी भवेत् ॥४०॥

abc

[□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□:] सू. भाषा.—रूपकुट्टः किं विधिः इष्टया इष्टकर्णपद्धतिः। इष्टा यैका तया वैश्यो- द्वितीयैः रूपवर्गैस्तेन वैधानमनेकासां यो रूपवर्गैस्तेनोनाया यथपदं तेन रूपार्धा- पृथक् युता नितादि तदर्थं च कार्यं। तत्र प्रथमार्धिगोर्थं रूपार्धा कल्प्यानि। ततो स्यदन्तरार्थं द्वितीयं मूलस्यैका करणी भवति। एवमसंकुलेमूलानयनं कार्यम्॥

अत्रोदाहरण म. म. सूर्याकारदिवेगुकम्।

चतुर्दर्शनद्वितीयाः पङ्क्तयो विश्वमजिताः। तं राशिं शीघमाचक्ष्व यदि जानासि कुट्टकम्॥ अत्र ३४ हरस्य शेषम् = । तथा १३ हरस्य शेषम् = । अतोऽर्धिकशेषहरः = । अल्पशेषहरः = । अनेनार्धिकशेषहरे भक्तं शेषम् = , ततः परस्परभजनेन जाता वल्ली उपान्तिमेन स्वोच्चं हृतोनयेन युते तदन्त्यं

$ax + by = c(a, b) \mid c$

$(a, b)q_1, q_2, \ldots, q_n$

$x_0 = 1x_1 = q_n x_{k+1} = q_{n-k} \cdot x_k + x_{k-1}$

$xy = (c - ax)/b$

शून्यगणितम्धनर्णशून्यानां संकलनं व्यवकलनं च । गुणने करणसूत्रकथनं भागहारे च ॥

[□□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□□□□□:] ऋणे ऋणं योजयेत् धनं धने। शून्ये शून्यं योजयेत्। धनात् ऋणं व्योजयेत्, ऋणात् धनं व्योजयेत्। शून्येन युतं राशिः स्वेनैव रूपेण स्थितः।

[□□□□□□□□□□□□□□□:] शून्येण गुणितं राशिः शून्यं भवति। शून्येण भक्तं राशिः शून्यं भवति। अव्यक्तसंकलितं यावद् इष्टतयोः करणसूत्रकथनम्। अव्यक्तगुणने सूत्रकथनम्। अव्यक्तमानानयनार्थं कथनम्।

$a/0 = 0$

$a + 0 = aa - 0 = a0 + 0 = 00 - 0 = 0$

$a \times 0 = 00 \times 0 = 0$

$a/0 = 0$

$0/a = 0a \neq 0$

$(-a) \times (-b) = +ab(-a) \times (+b) = -ab$

वर्गप्रकृतिःसमद्विबाहुत्रिभुजे भुजयोर्वर्गेण । करणीयोगान्तरे गुणनकथनम् ॥

वर्गसमीकरणाकथनम् । वर्गसमीकरणोद्धरणमानयनम् ॥

[□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□ □□□□□□□□□□□□□:] अत्र □वर्गप्रकृतिः' नाम समीकरणं $Nx^2 + 1 = y^2$ रूपस्य। अत्र N = प्रकृतिः (गुणकः), x = ह्रस्वमूलम्, y = दीर्घमूलम्। ब्रह्मगुप्तः अत्र समाधानाय □भावना' नाम विधिं ददाति --- यदा द्वयोः ह्रस्व-दीर्घमूलयोः युग्मेभ्यः नूतनयुग्मं प्राप्तुं शक्यते।

$Nx^2 + 1 = y^2 Nxy$
$(x_1, y_1)(x_2, y_2)N$

$$x' = x_1y_2 + x_2y_1, y' = Nx_1x_2 + y_1y_2$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2)Nx^2 + k_1 = y^2Nx^2 + k_2 = y^2$$

$$x_3 = x_1y_2 + x_2y_1, y_3 = Nx_1x_2 + y_1y_2$$

$$Nx_3^2 + k_1k_2 = y_3^2k_1 = k_2 = 1N = 92x = 120y = 115192 \cdot 120^2 + 1 = 1151^2$$

विलोमगतिकथनम्राश्यर्धं स्तच्छेषैश्चैवं युक्तार्धमासादिनहीनैः । तच्छेषैश्च युगगतं यः कथयति कुट्टकज्ञः सः ॥१४॥

१९. शङ्कुच्छायादिज्ञानाध्यायः

शङ्कु

प्रथमप्रश्नकथनम्हरेण भक्तः शुध्यति स राशिः कः। प्रथमं गुणाहरयोर्महतामपवर्तेनमानीयते।

[□□□□□□ □□□□□□□:] परस्परं भक्तयोर्गुणाहरयोर्न ते यच्छेषं तेन भक्तो तौ (गुणाहरौ भवतः) द्वौ गुणा- हरौ भवतः। ततो हृदयोर्गुणाहरयोः परस्परं भक्तयोर्लम्बान्यथोच्छ स्थापयानि, पूर्वं प्रदर्शितकुट्टकनियमेन। इदं कर्म तावत्पर्यन्तं कर्तव्यं यावदन्ते रूप शेषं तिष्ठेत्। तच्छेषं तथा केनापि गुणाकेन गुणितं रूपेण हीनं तच्छेषसंबन्धिहरेण भक्तं शुध्यति। सत्यैवं गुणाकः पूर्वोच्छोच्छः स्थापितकलानामधः स्थाप्यः, तदन्तात्फलं स्थाप्यम्।

शङ्कुच्छायानयनम्छायातो गृहादीनां च्छायानयनम् । इष्टगुहोच्चयको यदिति प्रश्नस्योत्तरसम्पादनम् ॥

$$(altitude) = aku/\sqrt{aku^2 + chy^2}$$

उच्छ्रितिकथनम्उच्छ्रितिकथनं समीपस्थस्योच्चयस्य ज्ञानार्थं दूरस्थस्य च । प्रकाशस्य गतिकथनं द्वयोरन्तरालस्य मानं च ॥

[□□□□□□ □□□□ □□□□□□ --- □□□□□□□:] गृहपुरुषान्तरसलिले यो हटचैत्यादि प्रश्नोत्तरकथनम्। बीजय गुहायां सलिले प्रसारे ति प्रश्नोत्तरकथनम्।
एकस्य गृहस्य छाया द्वितीयमात्रान्तरविधानेन त्रिप्रश्नोत्तरकथनम्। छायातो गृहादीनां च्छायानयनम्।

hd

$$h = \frac{s_2 \cdot g}{s_2 - s_1} \cdot \frac{d_2 - d_1}{g}, d = \frac{h \cdot s_1}{g}$$

gs_1, s_2d_1, d_2

२०. छद्दिच्छायाध्यायः

छद्दिराशीनामहोरात्रबलानाम् । राश्युदयानामसमानद्विकथनम् ॥
चरागयोः संस्थानकथनम् । शङ्कृह्यग्रयोः संस्थानकथनम् ॥
हग्गोलस्य हर्याहरयतं लम्बनावनतिरुपतो च कारणदर्शनम् । परलम्बनावनतिकथनम् ॥

[□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□:] प्रकारान्तरेण तयोः संस्थाने शङ्कुलस्य च कथनम्। हक्कर्मकथनम्। ग्रहसौगोल्योः स्थिरकुट्टकथनम्। ग्रहाणां चलकुट्टकथनम्। अध्यायोपसंहारः ॥
अत्र छायायाः गणना दीपशिखोच्चयच्छुक्लान्तरभूमिज्ञानार्थं दर्शिता। प्रकाश-परावर्तन-विषयेऽपि किञ्चिदुक्तम्।

$$cargra = \left(\frac{(\phi)\cdot(\delta)}{(\alpha)}\right)$$

$\phi\delta\alpha$

२१. गोलाध्यायः

आरम्भप्रयोजनकथनम्गोलप्रशंसाकथनम् । स्वगोलयथाने कारणम् ॥

गतिगोलयोः प्रशंसाकथनम् । यन्त्रारम्भप्रयोजनकथनम् ॥

[□□□□□□□□□ □□ □□□□□□□□□□□:] तन्त्राणां प्रतिपादनम् । सलिलादीनां प्रयोजनकथनम् । धनुषां च कथनम् । सूर्यादिमुखे यन्त्रधारणम् । इष्टघटिकायाः धनुषरचनरूपकथनम् । परीक्षाघट्यानयनम् । यन्त्रेण नतोन्नतकालज्ञानम् । धनुष्यन्त्रे विशेषकथनम् ।

भूगोलसंस्थानकथनम्भूगोलसंस्थानकथनम् ॥ दैवासुरसंस्थानवर्णनम् ॥

[□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□:] देवदैत्ययोर्मेषचक्रमरगत्यवस्थापनम् ॥ चक्रभ्रमणव्यवस्थाकथनम् ॥ दैनानीनां रविभ्रमणार्थदिवसानाम् ॥ देवदैत्ययोः राशिसंस्थानम् ॥ देवदैत्ययोः पितुमानस्यैव दिनप्रमाणानिरूपणम् ॥

निरक्षदेशान्तरयोजनकथनम्भूगोल लग्नावलयोः संस्थानम् ॥ निरक्षदेशान्तरयोजनकथनम् ॥

क्षुद्रयोः कथानिरूपणम् ॥

[□□ □□□ □□□□□□□□□□□:] निरक्षदेशः उज्जयिनी-क्षेत्रम्, यत्र रेखा (याम्योत्तर-वृत्तम्) पूर्णतः समपर्यायं ग्रहैः भ्रमति। अन्यत् क्षेत्रं प्रति देशान्तरं योजनैः मीयते --- प्रत्येकं योजन-चतुष्टयस्य एका लघु-घटिका भवति। तदनुसारं देशान्तर-घटिकाभिः ग्रहाणाम् उदय-कालः परिवर्तते।

$$dentara = \frac{yojanasfromUjjain}{4}$$

$\times$